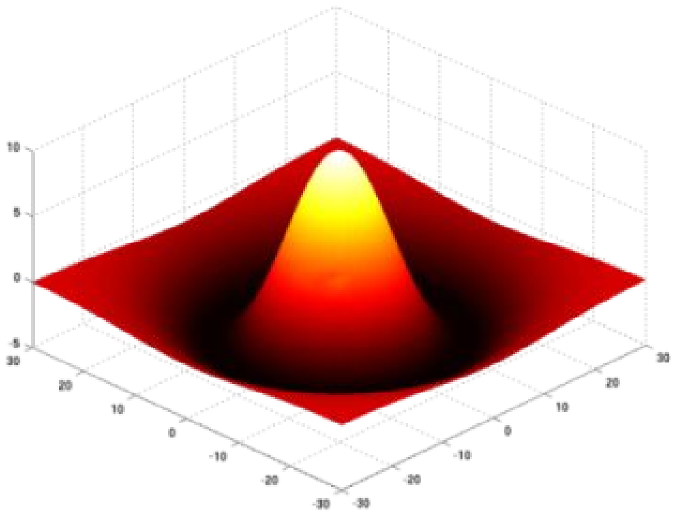
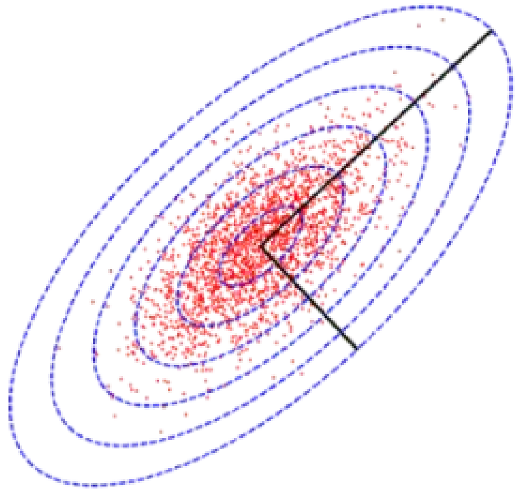
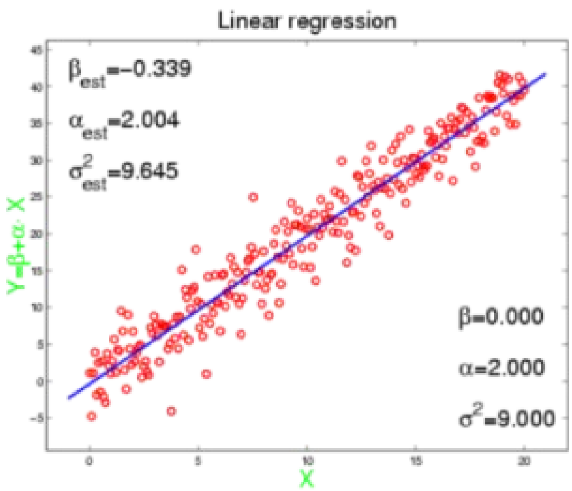
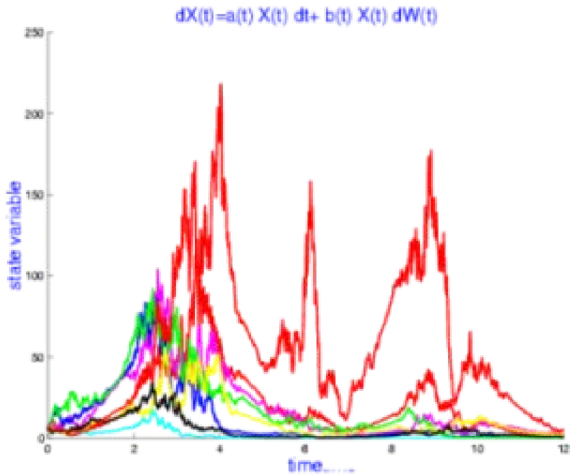
Stochastik









P. Matusz

1. Inhalt

2. Mathematische Modellierung von Zufallsvorgängen / Zufallsexperimenten

- Ein Zufallsexperiment kann mehrere **Ergebnisse** haben, diese werden zur **Ergebnismenge** Ω zusammengefasst.
- Möglich sind **endliche** Mengen Ω (z.B. $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$), **diskret unendliche** Mengen Ω (z.B. $\Omega=\mathbb{N}$ [Wartezeit auf eine 6 beim Würfeln]) und auch **kontinuierlich unendliche** Mengen Ω (z.B. $\Omega=\mathbb{R}$ [Wartezeit auf die Freundin bei einer Verabredung]).
- Die Menge Ω wird durch den Experimentator festgelegt, d.h., dass dasselbe Zufallsexperiment verschiedene Ergebnissmengen haben kann.

  Beispiel Würfeln: $\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$, $\Omega_2=\{\text{Fläche, Kante, Ecke}\}$, $\Omega_3=\{\text{gerade, ungerade}\}$ (Vergröberung von Ω_1), $\Omega_4=[0,2\pi[$ (geometrische Lage des Würfels).

  Beispiel Flug ab Kloten: $\Omega_1=\{\text{verspätet, pünktlich}\}$, ...
- Nach dem Experiment muss sich das Ergebnis eindeutig feststellen lassen. Es muss nicht jedes Ergebnis auch möglich sein, also $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ beim Würfeln ist deshalb denkbar. Das Ergebnis sollte aber Ω gehören.

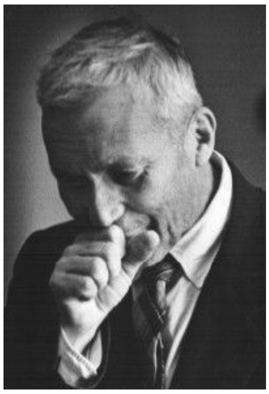


Illustration 1Kolmogorov

Beispiel Würfeln mit 2 Würfeln:

$\Omega_1=\{2,3,\ldots,11,12\}$ Augensumme

$\Omega_2=\{(1,1),(1,2),\ldots,(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$ Augenzahl und Reihenfolge (1. Wurf, 2. Wurf)

Würfelexperiment (50 mal würfeln):

$\Omega=\{0,1,2,3,\ldots,50\}$ (Anzahl Sechser)

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung (nach Kolmogorov) wird eher mit **Ereignissen** als mit **Ergebnissen** gearbeitet. Ereignisse sind **Teilmengen von** Ω .

Beispiel Würfeln: Ergebnismenge $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

Ereignismenge $P(\Omega)=\{\{\phi\},\underbrace{\{1\},\{2\},\ldots,\{6\}}_{Elementarereignisse},1,2,\ldots,\{1,2,3,4,5,6\}\}$

Wir sagen – **nach** der Druchführung des Experimentes – dass das Ereignis $A\subseteq\Omega$ eingetreten ist, wenn das **Ergebnis** Element von A ist.

3. Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogorov

Gegeben ist ein Zufallsexperiment mit Ergebnismenge Ω . Wir wollen nun den **Ereignissen** $A\subseteq\Omega$ eine **Wahrscheinlichkeit** $P(A)$ zuordnen.

Die Axiome von Kolmogorov geben nicht an, welchen Wert die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ konkret hat, sondern welche Eigenschaften die Funktion P (**Wahrscheinlichkeitsverteilung** auf Ω) haben muss.

3.1. Axiome

Wahrscheinlichkeit $P(A)$ sollte reellwertig sein:

I. Positivität: $P(A)\geq 0$ (für alle Ereignisse A)

II. Addivität: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ (für alle Ereignisse A, B mit $A\wedge B=\phi$

III. Normiertheit: $P(\Omega)=1$

Kommentar: II betrifft „anschliessende Ereignisse“, III betrifft das sichere Ereignis.

3.2. Folgerungen aus den Axiomen (Lehrsätze):

- $\bar{A}=\Omega\setminus A$ (**Gegenereignis**): $P(\bar{A})=1-P(A)$ ($P(A)+P(\bar{A})=1$)
- **Monotonie:** $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\leq P(B)$
- Es gilt: $P(A\cup B)=A\cup(B\setminus A)$

Das Ergebnis $\omega_k\epsilon\,\Omega$ tritt ein, wenn dass Elementarereignis $\{\omega_k\}$ eintritt. Also können wir als Wahrscheinlichkeit p_k des Ergebnisses ω_k den Wert $p_k=P(\{\omega_k\})$ nehmen. Durch diese Wahrscheinlichkeiten $p_1,p_2,\ldots,p_n$ ist die Wahrscheinlichkeit P für endliche Mengen $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$ vollständig bestimmt: $P(A)=\sum_{\omega_k\in A}p_k$.

Bei Vorgabe der Wahrscheinlichkeiten p_k sind die Axiome von Kolmogorov I, II, III erfüllt, wenn gilt: $p_k\geq 0$ und $\sum_{k=1}^{n}p_k=1$.

4. Laplace Wahrscheinlichkeit (klassische Wahrscheinlichkeit)

Aus Symmetriegründen können wir oft allen Ergebnissen $\omega \in \{\omega_1, \ldots, \omega_2\} = \Omega$ aus der **endlichen Menge** Ω dieselbe Wahrscheinlichkeit p zuordnen (Würfel, Münzenwurf, ...). Wegen $\sum_{k=1}^{n} p = np = 1$ ist dann $p = \frac{1}{n}$ und $P(A) = \sum_{\omega \in A} p = |A| \cdot p = \frac{|A|}{n}$.

Klassische Wahrscheinlichkeit: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Diese Hypothese ist vorallem bei Glücksspielen gerechtfertigt: z.B. Münzenwurf, Würfeln, Urnenmodell (verschiedenfarbige Kugeln in einer Urne).

In anderen Fällen ist die Hypothese sicher falsch: Anwesenheit eines Studierenden der Klasse I3q im Fach FS, Wahrscheinlichkeit mit 2 Würfeln eine 5 und eine selchs zu Würfeln ist verschieden von der Wahrscheinlichkeit, zweimal die 6 zu würfeln, ...

Beispiele:

- Würfeln mit einem Würfel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, G = \{2, 4, 6\}, U = \overline{G}$

$$P(G) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(U) = 1 - P(G) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- Würfeln mit 2 Würfeln: $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)\}, |(\Omega)| = 36$

A_k: *Ereignis Augensumme* k

$$A_2 = \{(1,1)\}, P(A_2) = \frac{1}{36}$$

$$A_3 = \{(1,2), (2,1)\}, P(A_3) = \frac{1}{18}$$

$$A_7 = \{(1,6), (2,5), \ldots, (6,1)\}, P(A_7) = \frac{1}{6}$$

- 10-maliges Würfeln einer Münze: $\Omega = \{k, z\}^{10}, |(\Omega)| = 1024$

Anzahl Ereignisse: 2^{1024}

A_k: *Insgesamt k-mal Kopf geworfen*

$$P(A_k) = \frac{|(A_k)|}{|(\Omega)|} = \frac{|(A_k)|}{1024}$$

$$|(A_k)| = \text{Anzahl k-elementige Teilmenge von } \{1, \ldots, 10\} = \binom{10}{k}$$

$$|(A_5)| = 252$$

$$P(A_5) = \frac{252}{1024} \approx 0.246$$

$$P(A_4) = \frac{\binom{10}{4}}{1024} = \frac{210}{1024} \approx 0.205$$

$$P(A_4 \cup A_5 \cup A_6) = P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = \frac{210}{1024} + \frac{252}{1024} + \frac{210}{1024} = \frac{21}{32} \approx 0.656$$

- 100 Würfel mit einer Münze: $\Omega = \{k, 7\}^{100}$, A_k *wie oben*

$$\sum_{k=40}^{60} P(A_k) = \sum_{k=40}^{60} \binom{100}{k} \cdot 2^{-100} \approx 0.965$$

5. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

5.1. Modellierung von Zufallsexperimenten mit Ereignisbäumen

(Aus Komplexitätsgründen wird hier auf eine Grafik verzichtet, es wird versucht die Ereignisbäume entsprechend zu beschreiben.)

- Beispiel Würfeln (1-stufiges Laplaceexperiment):
  Jeder Ast im Baum der Tiefe 1 hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Von jedem Knoten gehen 6 Äste aus.
- Beispiel Würfeln mit 2 Würfeln (2-stufiges Würfelexperiment)
  Jeder Ast im Baum der Tiefe 2 hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Von jedem Knoten gehen 6 Äste aus.
  Wahrscheinlichkeit jedes Ergebnisses ist $\frac{1}{36}$. Das heisst $P((5,6)) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(1.\ Wurf) \cdot P(2.Wurf)$.
  Gewinn für (ω_1, ω_2): $\omega_1 \in \{5,6\}$ und $\omega_2 \in \{1,2,3,4\}$ = Ereignis G.
  Gewinnwahrscheinlichkeit: $P(G) = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}_{P(Gewinnwurf_1) \cdot P(Gewinnwurf_2)} = \underbrace{\frac{\{5,6\} \times \{1,2,3,4\}}{\{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}}}_{oder\ nach\ Laplace} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$
  Allgemein für 2-stufige Laplaceexperimente, $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ gilt:
  $$P(\{(\omega_1, \omega_2) | \omega_1 \in A, \omega_2 \in B\}) = \frac{|A \times B|}{|\omega_1 \times \omega_2|} = \frac{|A|}{|\omega_1|} \cdot \frac{|B|}{|\omega_2|} = P(\omega_1 \in A) \cdot P(\omega_2 \in B)$$
  Andere (allgemeinere) Beschreibung der Gewinnmenge $G_1 \times G_2$ des Gesamtexperiments $\omega = \omega_1 \times \omega_2$
  - Gewinn beim 1. Wurf ($Ereignis \subseteq \omega_1 \times \omega_2$). $A = \{5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = G_1 \times \omega_2$
  - Gewinn beim 2. Wurf ($Ereignis \subseteq \omega_1 \times \omega_2$). $B = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4\} = \omega_1 \times G_2$
  Kontrolle der Wahrscheinlichkeiten: $\frac{|G_1 \times \omega_2|}{|\omega_1 \times \omega_2|} = \frac{|G_1| \cdot |\omega_2|}{|\omega_1| \cdot |\omega_2|} = \frac{|G_1|}{|\omega_1|}$ also $A \cap B = G_1 \times G_2$
  Produktsatz für unabhängige Ereignisse: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- Beispiel (gezinkter Würfel)
  Die Flächen 1,2,3 und 4 sind rot gefärbt, 5 und 6 sind grün gefärbt: $R = \{1,2,3,4\}$ $G = \{5,6\}$.
  Ereignisbaum: Von jedem Knoten der ersten Stufe gehen zwei Äste mit den Farben rot ($p = \frac{2}{3}$) oder grün ($p = \frac{1}{3}$) aus. Auf der zweiten Stufe sind unterhalb des roten Knotens vier weitere Äste mit der Wahrscheinlichkeit je $p = \frac{1}{4}$. Unterhalb des grünen Knotens sind zwei weitere Äste mit der Wahrscheinlichkeit je $p = \frac{1}{2}$.
  Bedingte Wahrscheinlichkeiten:
  - $P(1|R) = \frac{1}{4}$: Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses 1, wenn R eingetreten ist.
  - $P(5|G) = \frac{1}{2}$: Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses 5, wenn G eingetreten ist.
  - $P(6|R) = 0$: Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses 6, wenn R eingetreten ist.
  - $P(\{1,2,3\}|R) = \frac{3}{4} = \frac{P(\{1,2,3\})}{P(R)}$: Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse 1,2 oder 3, wenn R eingetreten ist.
  - $P(\{1,3,5\}|R) = \frac{1}{2} = \frac{P(\{1,3\})}{P(R)} = \frac{P(\{1,3\} \cap R)}{P(R)}$ (...)

  Allgemeine Defintion der bedingten Wahrscheinlichkeit:
  $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
  Allgemeiner Produktsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1. Pfadsatz / Produktformel):
  $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
  Allgemeiner Summensatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Summenformel):

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- Beispiel (Urnen):
  Gegeben sind zwei Urnen U_1 mit 2 roten und 3 grünen und U_2 mit 1 roten und 2 grünen Kugeln.
  Experiment: Zuerst wird zufällig eine Urne gewählt und dann aus der gewählten Urne eine Kugel gezogen.
  $\Omega = \{R_1, R_2, R_3, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}$ Wahrscheinlichkeit ist aber nicht klassisch, z.B.:
  $p(\{R_1\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$
  $p(\{R_3\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
  Wir betrachten nun die Eriegnisse:
  $U_1 = \{R_1, R_2, G_1, G_2, G_3\}$
  $U_2 = \{R_3, G_4, G_5\} = \overline{U_1}$
  $R = \{R_1, R_2, R_3\}$
  $G = \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\} = \overline{R}$
  $P(R|U_1) = \frac{2}{5}, P(R|U_2) = \frac{1}{3}$
  $P(G|U_1) = \frac{3}{5}, P(G|U_2) = \frac{2}{3}$
  $P(R) = P\big((R \cap U_1) \cup (R \cap U_2)\big) = P(R \cap U_1) + P(R \cap U_2) = P(R|U_1) \cdot P(U_1) + P(R|U_2) \cdot P(U_2) = \frac{11}{30}$
  $P(G) = \overline{P(R)} = 1 - \frac{11}{30} = \frac{19}{30}$
  $$P(U_1|R) = \frac{P(U_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|U_1) \cdot P(U_1)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{30}} = \frac{6}{11}$$

  Interpretation mit Häufigkeiten: Experiment wird N mal durchgeführt, N_R mal wird dabei eine rote Kugel gezogen $\frac{N_R}{N} \approx \frac{11}{30}$.
  In $N_{(U_2|R)}$ dieser Versuche wurde die Urne U_1 gewählt: $\frac{N_{(U_1|R)}}{N_R} = \frac{6}{11}$

  Hier haben $P(R)$ wir mit dem Satz von der **totalen Wahrscheinlichkeit** und $P(U_1|R)$ mit der berühmten Formel von Bayes gerechnet.

5.2. Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$ eine Zerlegung von Ω, also $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n (\forall i, j\, (i \neq j \rightarrow B_i \wedge B_j = \phi))$ parameterweise disjunkt.

Sei nun $A \subseteq \Omega$ ein Ereignis, dann ist

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)) \\ &= P(A \cap B_1) + \ldots + P(A \cap B_n) \\ &= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n) \end{aligned}$$

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k) \cdot P(B_k)$$

5.3. Satz von Bayes

$$P(B_k|A)=\frac{P(B_k\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A|B_k)\cdot P(B_k)}{P(A)}$$

$$P(B_k|A)=\frac{P(A|B_k)\cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\cdot P(B_i)}$$

6. Zufallsgrössen (Zufallsvariablen)

Wir gehen von einem Zufallsexperiment aus mit der Ergebnismenge Ω. Den einzelnen Ergebnissen $\omega\in\Omega$ ordnen wir eine Kenngrösse zu: $X(\omega)\in\mathbb{R}$.

$$X:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$$

Beispiel 1: Bei zweimaligem Würfeln interessiert vielleicht gar nicht das Ergebnis $(\omega_1,\omega_2)\in\{1,....6\}^2$ sondern nur die Augensummen:

$$X\left((\omega_1,\omega_2)\right)=\omega_1+\omega_2$$

Beispiel 2: Beim 50x Würfeln interessiert vielleicht nicht das Ergebnis $\omega=[\omega_1,\ldots,\omega_{50}]\in\{1,....6\}^{50}$, sondern nur die Anzahl X geworfene Sechser.

$$X(\omega)=\left|\{k|\omega_k=6\}\right|$$

Beispiel 3: Zufallsexperiment „Probe Stochastik“: Mögliche Ergebnisse

$$\omega=\left[n_1,\ldots,n_{15}\right] \qquad \left(n_1,\ldots,n_{15}\in\left\{\frac{m}{10}\middle|m=10,\ldots,60\right\}\right)$$

Bedeutung von ω: Studierende werden nummeriert, n_k ist Note des Studenten k.

Mögliche Kenngrösse n zur Beschreibung des Resultats des Experiments:

$X_1(\omega)=\frac{\sum_{k=1}^{15} n_k}{15}$ (Klassendurchschnitt)

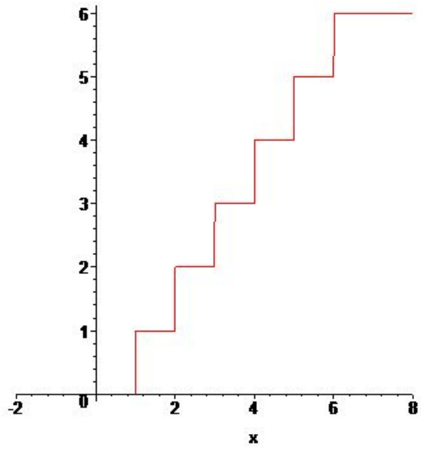
$X_2(\omega)=\left|\{n_k|n_k<3.75\}\right|$ (Anzahl ungenügende Noten)

7. Wahrscheinlichkeitsverteilung

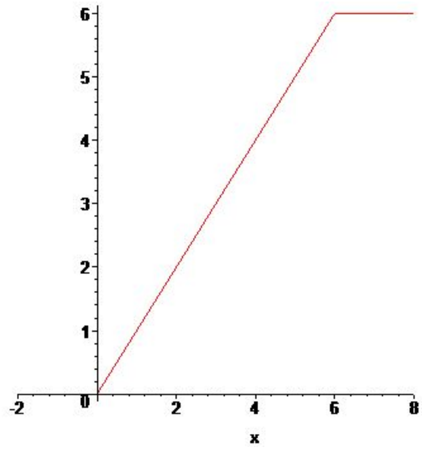
Ergebnis eines Zufallsexperiment sei eine reelle Zahl x (direkt oder berechnet). Das Experiment wird dann vollständig durch die Verteilungsfunktion der zugehörigen Zufallsgrösse X beschrieben.

$$P(X\leq x)=F(x)$$

Zwei Beispiele: Würfeln, Gleichverteilung auf dem Intervall [0,1].



Diskrete Verteilung



Kontinuierliche Verteilung

Aus der Verteilungsfunktion können wir die Wahrscheinlichkeit ablesen, dass das Ergebnis in einem gegebenen Intervall liegt:

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a) \qquad (a < b)$$

$$P(a \le X \le b) = F(b) - \lim_{x \to a_-} F(x)$$

$$P(X = a) = F(a) - F(a_-)$$

7.1. Diskrete Verteilung

Die Zahl $x_k \in \mathbb{R}\,(k \in \mathbb{N}_0)$ wird mit Wahrscheinlichkeit p_k angenommen:

$$F(x) = P\{x_k | x_k \le x\} = \sum_{x_k \le X} p_k$$

7.2. Kontinuierliche Verteilung

Die Verteilungsfunktion sei differenzierbar auf $\mathbb{R}$, $F'(x) = \varphi(x)$: **Dichtefunktion** der Verteilung. Die Verteilungsfunktion ist also Stammfunktion der Dichtefunktion:

$$F(x) + C = \int \varphi(x)\,dx$$

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b \varphi(x)\,dx \qquad (\varphi(x) \ge 0)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$

Die verteilungsfunktion F(x) (oder Dichtefunktion) liefern uns die vollständige stochastische Information über eine Zufallsgrösse X. Sie kann durch statistische Zählungen oder durch die Monte-Carlo-Simulation empirisch aproximiert werden – zum Beispiel die Grössenverteilung von Menschen eines Landes.

Vielleicht sind wir nur daran interessiert, ob Personen der Bevölkerung A grösser sind als diejenigen der Bevölkerung B.

Wir versuchen deshalb, solche Informationen durch **Kenngrössen zu beschreiben**, die der Verteilungsfunktion zugeordnet sin, etwa die durchschnittliche Grösse der Bevölkerung A.

Dem durchschnittlichen Wert einer Verteilung – der **Erwartungswert** E(X) der Zufallsgrösse X – beschreibt die Lage der Zufallsgrösse auf der x-Achse.

7.3. Erwartungswert einer diskreten Verteilung $P(X=x_k)=p_k$

Bei einer grossen Anzahl N Wiederholungen des Zufallsexperiments erwarten wir das Ergebnis $X=x_k$ mit der Häufigkeit n_k:

$$p_k \approx \frac{n_k}{N}$$

Durchschnittliche Wert des Versuchs, also die Grösse X:

$$\frac{1}{N}\sum_k n_k x_k \approx \sum_k p_k x_k$$

Erwartungswert:

$$E(X)=\sum_k p_k x_k$$

7.4. Erwartungswert einer kontinuierlichen Zufallsgrösse mit Dichtefunktion $\varphi(x)$

Wert, dass $X \approx x$ ist (d.h. $x \le X \le x+\Delta x$) beträgt ungefähr

$$\int_{x_k}^{x_k+\Delta x} \varphi(t)\,dt \approx \varphi(x_k)\,\Delta x$$

Diskreter Erwartungswert:

$$\sum_k x_k p_k = \sum_k x_k \varphi(x_k)\,\Delta x$$

Für $\Delta x \to 0$ erhalten wir

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\varphi(x)\,dx$$

7.5. Verschiedene Verteilungsfunktionen

Beispiel (wichtig in Logistikproblemen): Wartezeit auf den Eintritt eines Ereignisses

X: Wartezeit auf den Tod einer zufällig gewählten bei der Kasse xy versicherten Person

$X|R$: Wartezeit auf den Tod eines Rauchers

$X|N$: Wartezeit auf den Tod eines Nichtrauchers

Wie beschreiben wir mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung solche Zufallsgrössen? Der Zufall für solche Grössen wird vollständig mit Hilfe der Verteilungsfunktion $F(x)$ (oder der Dichtefunktion $F'(x)$) beschrieben.

$$F(x)=P(X\le x)=P(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\le x\})$$

Hauptfrage: Wie finden wir diese Verteilungsfunktion $F(x)$ für eine gegebene Zufallsgrösse X?

- Empririsch durch Auszählen gewisser Stichproben und Bestimmen der entsprechenden Häufigkeitsverteilungen
- Theoretisch mit Hilfe von mathematischen Modellen des Zufallsprozesses. Wird auch in der Statistik angewendet. Statt die ganze Verteilungsfunktion zu bestimmen, müssen statistisch nur ein paar Parameter geschätzt werden (bei der Normalverteilung sind das Erwartungswert und Standartabweichung).
- Durch Monte Carlo Simulation: Bei einem komplexen Zufallsprozess werden Bestandteile der Prozesse mathematisch modeliert, und dann implementiert und dann werden die gesuchten

Häufigkeiten mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators erzeugt.

Beispiele

Empirisch:	X sei die Wahrscheinlichkeit auf einen Kunden
Theoretisch:	X sei Wartezeit auf eine 6 beim Würfeln (geometrische Verteilung)
Monte-Carlo:	X sei Warteizeit auf alle Zahlen beim Würfeln (jede Zahl muss mindestens einmal geürfelt worden sein)

7.6. Wartezeit bei Zufallsprozessen ohne Alterung

- Geometrische Verteilung (diskrete Zeit)
- Exponentialverteilung (kontinuierliche Zeit)

7.6.1. Geometrische Verteilung

Bei einer Versuchsreihe kann das Ergebnis beim Versuch 1,2,3,... eintreten und der „Prozess altert nicht". Die einzelnen Versuche sind also unabhängig voneinander.

$$p=P(X=1)=P(X=n+1|X>n)$$

Diskrete Dichtefunktion:

$P(X=n)=P(X=n|X>n-1)\cdot P(X\neq n-1|X>n-2)\cdot\ldots\cdot P(X\neq 2|X>1)\cdot P(X>1)$

$P(X=n)=rq\cdot\ldots\cdot q=p\cdot q^{n-1}$

7.7. Diskrete Wartezeit (Zufallsprozess ohne Gedächtnis)

Dichtefunktion: $P(X=n)=pq^{n-1}$

Verteilungsfunktion: $F(n)=P(X\le n)=\sum_{k=1}^{n} pq^{k-1}=p\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=1-q^n$

Erwartungswert: $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}\cdot k=\frac{1}{p}$

Wartezeit auf das zweite Eintreffen des Ereignisses (bei einer beliebigen diskreten Wartezeit):

$$\sum_{k=1}^{n-1} P(X=k)\cdot Q(X=n-k)$$

7.8. Exponentialverteilung (kontinuierliche Wartezeit, gedächtnislos)

$$P(X>s+t)=P(X>s+t|X>t)\cdot P(X>t)\underbrace{=}_{\text{keine Alterung}}P(X>s)\cdot P(X>t)$$

Abkürzung:

$$G(t)=P(X>t)$$

Funktionalgleichung:

$$G(s+t)=G(s)\cdot G(t)$$

Ableiten nach s:

$$G'(s+t)=G'(s)\cdot G(t)$$

$s=0$:

$$G'(t)=\underbrace{G'(0)}_{\lambda}\cdot G(t)$$

$$\frac{G'(t)}{G(t)}=-\lambda$$

$$\rightarrow \ln(G(t))=-\lambda t+C$$

$$G(t)=e^{-\lambda t+C}=K\cdot e^{-\lambda t}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(t)=P(X\leq t)$$
$$F(t)=1-G(t)$$
$$F(t)=1-K e^{-\lambda t}$$

zum Beispiel:

$$F(0)=\underbrace{P(X\leq 0)}_{0}=1-K\rightarrow K=1$$

Exponentialverteilung:

$$P(X\leq t)=1-e^{-\lambda t} \qquad (\lambda>0/t\geq 0)$$

Dichtefunktion $F'(t)=\varphi(t)$:

$$\varphi(t)=\lambda e^{-\lambda t}$$

8. Übungen

8.1. *Klassische Wahrscheinlichkeit*

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit mit drei Würfeln
   a. nie eine 6
   $p=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}\approx 0.58$ oder $\frac{5^3}{6^3}=\frac{125}{216}$
   b. mindestens 2 mal die 6
   $p=\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)\cdot 3=\frac{2}{27}\approx 0.07$ oder $\frac{(3\cdot 5)}{216}+\frac{1}{216}=\frac{2}{27}$
   c. dreimal dieselbe Zahl
   $p=\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot 6=\frac{1}{36}\approx 0.0278$ oder $\frac{6}{216}\approx 0.0278$
   d. drei verschiedene Zahlen
   $p=\left(\frac{6}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{4}{6}\right)=\left(\frac{5}{9}\right)\approx 0.5556$
   e. lauter ungerade Zahlen
   $p=\frac{3^3}{216}=\frac{9}{216}\approx 0.042$
   f. Augensumme 10
   $p=\frac{6\cdot 6}{216}=\frac{1}{6}\approx 0.16667$

2. Problem des Chevalier de Méré. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
   a. bei 4 Würfen mit einem Würfel mindestens eine 6 auftritt
   $$p=1-\frac{5^4}{6^4}=\frac{14}{27}\approx 0.52$$
   b. bei 24 Würfen mit 2 Würfeln mindestens eine Doppelsechs
   $$p=1-\frac{35^{24}}{36^{24}}\approx 0.49$$

8.2. Bedingte Wahrscheinlichkeit

1. Bei einem Zufallsexperiment wird mit der Wahrscheinlichkeit je $\frac{1}{3}$ zufällig eine Urne gewählt und dann daraus mit Wahrscheinlichkeit je $\frac{1}{3}$ eine Kugel gezogen. In Urne 1 befinden sich drei schwarze, in Urne zwei schwarze und eine weisse, in Urne 3 zwei weisse und eine schwarze Kugel.
   a. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine schwarze Kugel gezogen?
   $$P(S)=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$
   b. Es wird eine schwarze Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie aus Urne 1?
   $$P\left(U_1\middle|S\right)=\frac{P\left(S\middle|U_1\right)\cdot P\left(U_1\right)}{P(S)}=\frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

2. Bei der Durchleuchtung werden 90% der TBC-Träger als infiziert erkannt; von den gesunden Personen wird 1% fälschlicherweise als Träger diagnostiziert. Nur 0.1% Personen sind insgesamt infiziert.
   a. Wie viele Prozent der Untersuchten werden als TBC-Träger eingestuft?
   $$P(erkannt)=0.001\cdot 0.9+0.999\cdot 0.01=0.0009+0.00999=1.09\%$$
   b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine als TBC-Träger eingestufte Person tatsächlich infiziert?
   $$p=\frac{0.001\cdot 0.9}{0.0109}=8.3\%$$
   c. Veranschauliche die gefundenen Wahrscheinlichkeiten in einem Häufigkeitsbaum mit 1000 Personen?
   $$Anzahl\ TBC\ und\ richtig\ erkannt=0.9\ Personen$$
   $$Anzahl\ TBC\ und\ falsch\ erkannt=0.1\ Personen$$
   $$Anzahl\ gesund\ und\ richtig\ erkannt=989\ Personen$$
   $$Anzahl\ gesund\ und\ falsch\ erkannt=10\ Personen$$

3. Bei einem Zufallsexperiment werden aus einer Urne mit 10 roten und blauen 3 Kugeln ohne Zurücklegen drei Kugeln gezogen.
   a. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die dritte gezogene Kugel blau ist?
   $$p=\frac{10}{13}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{3}{11}+\frac{10}{13}\cdot\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}+\frac{3}{13}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{11}+\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}=\frac{3}{13}$$
   b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die dritte Kugel blau, wenn die erste Kugel rot ist?
   $$p=\frac{9}{12}\cdot\frac{3}{11}+\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{27}{132}+\frac{6}{132}=\frac{33}{132}=\frac{1}{4}$$
   c. Die dritte gezogene Kugel sei blau. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde zu Beginn eine rote gezogen?

$$p=\frac{\frac{10}{13}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{3}{11}+\frac{10}{13}\cdot\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}}{\frac{3}{13}}=\left(\frac{270}{1716}+\frac{60}{1716}\right)\cdot\frac{13}{3}=\frac{330}{1716}\cdot\frac{13}{3}=\frac{4290}{5148}=\frac{5}{6}$$

d. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die dritte Kugel blau, wenn zuerst zwei gleichfarbige Kugeln gezogen werden?

$$p=\frac{\frac{10}{13}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{3}{11}+\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}}{\frac{10}{13}\cdot\frac{9}{12}+\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}}=\frac{\frac{276}{1716}}{\frac{96}{156}}=\frac{276\cdot156}{1716\cdot96}=\frac{43056}{164736}=0.261\overline{36}=\frac{23}{88}$$

e. Die drei gezogenen Kugeln haben alle dieselbe Farbe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die Kugeln blau?

$$p=\frac{\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}}{\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}+\frac{10}{13}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{8}{11}}=\frac{\frac{6}{1716}}{\frac{726}{1716}}=\frac{6}{726}=\frac{1}{121}$$

9. Alphabetical Index