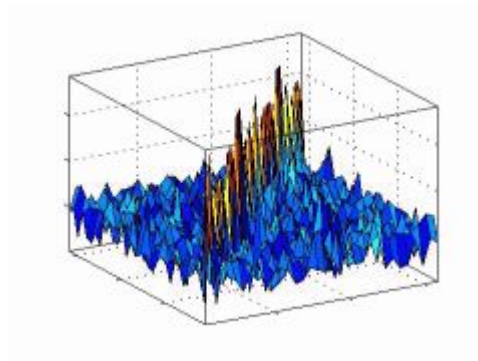


Signalverarbeitung



P. Matusz

1. Inhalt

| | |
|---|----|
| 1. Inhalt..... | 2 |
| 2. AID-Wandlung von Signalen..... | 2 |
| 3. Diskrete Fouriersynthese (IDFT, ifft)..... | 5 |
| 4. Herleitung der Formel für die DFT..... | 6 |
| 5. Signale im Zeit- und Frequenzbereich..... | 7 |
| 6. Signalverarbeitung..... | 8 |
| 6.1. Anwendung der Eigenschaften..... | 8 |
| 6.2. Filterung von Diracimpulsen..... | 9 |
| 6.2.1. Beispiel 1..... | 9 |
| 6.2.2. Beispiel 2: Mittelwertfilter (kausal) der Länge N..... | 10 |
| 6.2.3. Beispiel 3: Differenzenfilter..... | 10 |
| 6.3. Filterung / Faltung mit Matlab..... | 10 |
| 6.3.1. Beispiele von Faltungen..... | 10 |
| 6.4. Filterung im Frequenzbereich..... | 10 |
| 7. Matlab Befehle..... | 10 |
| 8. Stichwortverzeichnis..... | 11 |

2. AID-Wandlung von Signalen

Um den Informationsgehalt eines analogen Signals $f(t \in \mathbb{R}, \text{ analoge Zeit}, f(t) \in \mathbb{R} \text{ oder } f(t) \in \mathbb{C})$ tasten (samplen) wir die Werte von f an geeigneten Stellen ab. Dazu wählen wir eine Abtastperiode T_s und bestimmen die Werte von f für die Zeiten $t = nT_s (n \in \mathbb{Z} / T_s > 0)$. Wir erhalten das diskretisierte Signal:

$$f_d[n] = f(nT_s) \text{ wobei } (n \in \mathbb{Z}, \text{ diskrete interne Zeit})$$

Wollen wir das ursprüngliche Signal $f(t)$ „approximativ“ mit Hilfe des diskreten Signals $f_d: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ beschreiben wollen, dann müssen um zusätzlich die Periode T_s speichern.

Einlegen eines Audiosignals in Matlab:

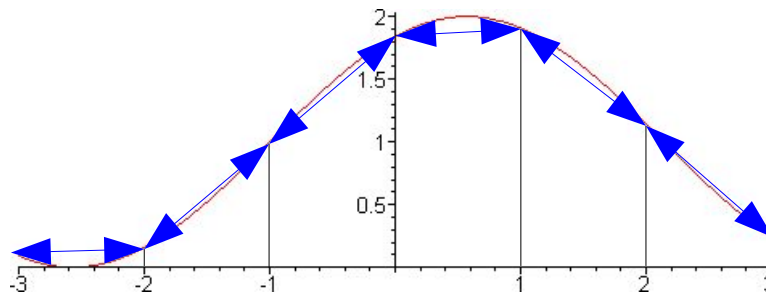
```
[signal, frq] = wavread('* .wav')
```

Output des Lesebefehls ist das endliche Signal (8-bit oder 16-bit quantisiert) ein Vektor

```
signal = [f[0], f[1], ..., f[n-1]] -> f[0] Signal(1) / f[n-1] Signal(n)
```

Je kleiner wir die Abtastperiode $T_s > 0$ wählen, desto weniger Information verlieren wir, desto besser wird das analoge Signal approximiert (Plot), aber desto grösser ist die Datenmenge bei vorgegebener Zeitdauer.

Welche Information geht beim Abtasten verloren?



Verloren gehen also alle Werte $f(t) (t \neq nT_s, n \in \mathbb{Z})$ - was weniger schlimm ist, wenn das Eingangssignal „sehr regulär“ ist (z.B. konvex), keine grossen Ausschläge besitzt – dann können wir das Ausgangssignal in guter Näherung integrieren (zum Beispiel linear).

Beschreibung des Informationsverlustes bei der Abtastung: Das Signal f ist also als Überlagerung von harmonischen Schwingungen $e^{i\omega t} (t \in \mathbb{R})$ dargestellt.

Was geschieht also beim Abtasten einer harmonischen Schwingung $e^{i\omega t}$ ($t \in \mathbb{R}$) mit der Abtastperiode T_s ?

$$t = [0, T_s, 2T_s, 3T_s, \dots, nT_s]$$

Wir können den Abtastprozess nicht nur mit Hilfe der Abtastperiode T_s (und Wahl des Zeitpunktes $t=0$) beschreiben, sondern auch mit den verwandten Parametern

- $\nu_s = \frac{1}{T_s}$: Abtastfrequenz (z.B. $\nu_s = 44.1 \text{ kHz}$ bei der Soundkarte)
- $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi \nu_s$: Abtastkreisfrequenz
- $\frac{\nu_s}{2}$: Nyquistfrequenz
- $\frac{\omega_s}{2}$: Nyquistkreisfrequenz

Diskrete harmonische Schwingungen: Die diskrete harmonische Schwingung der Kreisfrequenz ω enthalten wird durch Abtastung der kontinuierlichen harmonischen Schwingung:

$$e_\omega(t) = e^{i\omega t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

der Kreisfrequenz ω mit Abtastperiode 1 (Hz):

$$e_\omega[n] = e^{i\omega n}$$

Diese ist periodisch mit Periode $N \in \mathbb{N}$, wenn gilt

$$\begin{aligned} e^{i\omega(n+N)} &= e^{i\omega n} \\ \rightarrow e^{i\omega n} \cdot e^{i\omega N} &= e^{i\omega n} \rightarrow e^{i\omega N} = 1 \\ \rightarrow \omega N &= 2\pi k & (\forall n \in \mathbb{Z} / k \in \mathbb{Z}) \\ \rightarrow \omega &= \frac{2\pi k}{N} \end{aligned}$$

Von der N-periodischen diskreten harmonischen Schwingungen – die wir abgekürzt mit

$$e_k[n] = e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \quad (k \in \mathbb{Z}, \text{ Frequenz})$$

sind allerdings nur diejenigen mit Frequenz $k=0, 1, \dots, N-1$ voneinander verschieden, denn

$$e_{k+N}[n] = e^{\frac{2\pi i k(n+N)}{N}} = e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \cdot \underbrace{e^{2\pi i k}}_1 = e_k[n]$$

Abtastung der harmonischen Schwingung $e^{i\omega t}$ ($t \in \mathbb{R}$) mit Abtastperiode T_s :

$$e_{\omega,d}[n] = e^{i\omega n T_s} = e^{i(\omega T_s)n}$$

Diese Diskretisierung führt also auch auf eine diskrete harmonische Schwingung der Kreisfrequenz $\omega \cdot T_s$.

Geometrische Interpretation: Mit der Funktion $e^{i\omega t}$ ($t \in \mathbb{R}$)



die Zeit t beschreiben wir eine gleichförmige Bewegung auf den komplexen Einheitskreis der Winkelgeschwindigkeit ω .

Die Abtastung entspricht einer stroboskopischen Beleuchtung der Bewegung mit Zeitintervallen T_s . Den Rest der analogen Bewegung ($t \neq nT_s, n \in \mathbb{Z}$, Radar) findet im dunkeln statt. Wir wissen nicht, ob im Dunkeln der Punkt $e^{i\omega T_s}$ (und dann die darauffolgenden Punkte) auf direktem Wege oder mit zusätzlichen (mehrmaligen) Umrundungen des Einheitskreises in positiver oder negativer Richtung erreicht werden.

Algebraische Untersuchung: Welche kontinuierlichen harmonischen Schwingungen $e^{i\omega_1 t}$ und $e^{i\omega_2 t}$ führen auf dieselbe diskrete harmonische Schwingung bei der Abtastung:

$$\begin{aligned} e^{i\omega_1 n T_s} &= e^{i\omega_2 n T_s} \\ \rightarrow e^{i(\omega_1 - \omega_2) n T_s} &= 1 \\ \rightarrow (e^{i(\omega_1 - \omega_2) T_s})^n &= 1 \\ \rightarrow e^{i(\omega_1 - \omega_2) T_s} &= 1 \\ \rightarrow (\omega_1 - \omega_2) T_s &= 2k\pi \quad (\forall n \in \mathbb{Z} / \forall k \in \mathbb{Z}) \\ \rightarrow \omega_1 - \omega_2 &= \underbrace{\frac{2k\pi}{T_s}}_{k\omega_s} \\ \rightarrow \omega_1 &= \omega_2 + k\omega_s \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Interpretation (von harmonischen Schwingungen) im Frequenzbereich: Jede harmonische Schwingung $e^{i\omega t}$ hat einen Alias $e^{i(\omega + k\omega_s)t}$ mit Kreisfrequenz im Intervall $[0, \omega_s[$ mit der gleichen Diskretisierung oder auch einen (eindeutig bestimmten) niedrigstfrequenten Alias im Intervall $] -\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$.

Folgerung: Jede diskrete (oder kontinuierliche) Überlagerung von komplexen harmonischen Schwingungen hat einen $] -\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$ bandbegrenzter Alias.

Darstellung im Frequenzbereich:

Dargestelltes Signal: $f(t) = \sum_{k=1}^5 c_k \cdot e^{i\omega_k t} (t \in \mathbb{R})$

Bandbegrenzter Alias: $\tilde{f}(t) = \sum_{k=1}^5 c_k \cdot e^{i\tilde{\omega}_k t} (\tilde{\omega}_k \in] -\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}])$

Beispiel: Abtastung einer Cosinusschwingung $f(t) = \cos(\omega t)$
 $\tilde{f}(t) = \cos((\omega - \omega_s)t)$

Beispiel: Abtastung der Nyquistfrequenz:

Abtastkreisfrequenz: ω_s

Abtastperiode: $T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$

Analoges Signal: $\cos(\frac{\omega_s}{2} \cdot t)$ $\sin(\frac{\omega_s}{2} \cdot t)$ $\cos((\frac{\omega_s}{2} + \epsilon) \cdot t)$

Abgetastetes Signal: $\cos(\frac{\omega_s}{2} \cdot n \cdot T_s)$ $\sin(\frac{\omega_s}{2} \cdot n \cdot T_s) = 0$ $\cos((\frac{\omega_s}{2} + \epsilon) \cdot n \cdot T_s)$
 $= \cos(\frac{\omega_s}{2} \cdot n \cdot \frac{2\pi}{\omega_s})$ $\sin(\frac{\omega_s}{2} \cdot n \cdot T_s) = 0$ $\cos((\frac{\omega_s}{2} + \epsilon) \cdot n \cdot T_s)$
 $= \cos(\pi \cdot n) = (-1)^n$

3. Diskrete Fouriersynthese (IDFT, ifft)

Gegeben ist ein endliches diskretes Signal (Signalvektor) $[f[0], \dots, f[N-1]]$ der Länge N im Zeitbereich ($f[0], \dots, f[N-1]$ Abtastwerte).

Ziel: Harmonische Synthese dieses Vektors, also Darstellung als Überlagerung von diskreten harmonischen Schwingungen $e^{i\omega n} (n \in \mathbb{Z})$ der Periode N .

Frage 1: Welche diskreten harmonischen Schwingungen haben Periode $N \in \mathbb{N}$?

Bedingung an die Schwingung $e^{i\omega n} (n \in \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} e^{i\omega(n+N)} &= e^{i\omega n} \\ e^{i\omega n} \cdot e^{i\omega N} &= e^{i\omega n} \\ e^{i\omega N} &= 1 \\ e^{i\omega N} &= e^{2\pi i k} \\ \omega N &= 2\pi k \\ \omega &= \frac{2\pi k}{N} \\ e^{i\omega n} &= e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \end{aligned}$$

Diese Schwingungen sind N -periodisch als Funktion der Zeit $n \in \mathbb{Z}$, also auch N -periodisch in der diskreten Frequenz $k \in \mathbb{Z}$ also sind nur die Schwingungen

$$e^{\frac{2\pi i k n}{N}} (k=0, 1, \dots, N-1)$$

verschieden.)

Kurze Repetition:

Signalvektoren $[f[0], \dots, f[N-1]]$ bzw. N -periodische diskrete Signale $f[n] (n \in \mathbb{Z})$ (Zeitbereich).

Harmonische Synthese (IDFT) des Signals f mit Hilfe des N -periodischen diskreten harmonischen Schwingungen $e_k[n] = e^{\frac{2\pi i k n}{N}} (n \in \mathbb{Z}; k \in \mathbb{Z})$.

Wegen des Alias-Effektes (N -Periodizität auch in der Variablen k – Frequenzparameter) genügen die Schwingungen mit $k=0, \dots, N-1$.

Synthese von f : Darstellung in der Form $f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{\frac{2\pi i k n}{N}} (n \in \mathbb{Z}; c_k \in \mathbb{C})$.

Fragen: Welche N -periodischen Signale f lassen sich so synthetisieren? Wie finde ich zu einem gegebenen Signal $f[n] (n=0, \dots, N-1)$ die Koeffizienten c_k (harmonische Analyse)? Wir versuchen diese Fragen nun anhand eines Beispiels zu beantworten:

Beispiel $N=4, f[n] = n \bmod 4 (n \in \mathbb{Z}; f = [0, 1, 2, 3])$

Frage: Können wir dieses Signal in der Form $f[n] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 c_k \cdot e^{\frac{\pi i k n}{2}}$ darstellen? Was ist c_k ? Können wir also den Vektor $[0, 1, 2, 3]$ als Linearkombination der Vektoren

$$\begin{aligned} [1, 1, 1, 1] &\text{ für } (k=0) \\ [1, i, -1, -i] &\text{ für } (k=1) \\ [1, -1, 1, -1] &\text{ für } (k=2) \\ [1, -i, -1, i] &\text{ für } (k=3) \end{aligned}$$

darstellen.

Bedingungen an die Koeffizienten c_k :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{c_0}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{c_1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{c_2}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{c_3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$c_0=6; c_1=-2+2i; c_2=-2; c_3=-2-2i$$

Allgemein:

$$\begin{pmatrix} f[0] \\ \dots \\ f[N-1] \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i \cdot 1 \cdot n}{N}} & \dots & e^{-\frac{2\pi i \cdot (N-1) \cdot n}{N}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & e^{\frac{2\pi i}{N}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{c_0}{N} \\ \dots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Resultat: } n \bmod 4 = \frac{1}{4} (6 \cdot 1 + (-2+2i) \cdot i^n + (-2) \cdot (-1)^n + (-2-2i) \cdot (-i)^n) (n \in \mathbb{Z})$$

4. Herleitung der Formel für die DFT

• Welches Signal $[f[0], \dots, f[N-1]]$ im Zeitbereich gehört zum Vektor

• $c=[1, 0, 0, \dots, 0]$ (d.h. $c_0=1, m c_1=0, \dots, c_{N-1}=0$)

$$f[n] = \frac{1}{N} (n \in \mathbb{Z})$$

$$f = \left[\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N} \right]$$

• $c=[0, 1, 0, 0, \dots, 0, 0]$ (d.h. $c_0=1, c_k=0$ sonst)

$$f[n] = \frac{e^{\frac{2\pi i n}{N}}}{N} (n \in \mathbb{Z}) \quad (\text{Grafisch ergibt dies ein reguläres N-Eck}).$$

• $c=[1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1]$ (d.h. $\forall_k (c_k=1)$).

$$f[n] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i k n}{N}} (n \in \mathbb{Z})$$

• Beispiel $n=0$: $f[0] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} 1 = \frac{N}{N} = 1 (n \in \mathbb{Z})$

• Beispiel $n=1$: $f[1] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i k}{N}} = 0 (n \in \mathbb{Z})$

• Beispiel $n=2$: $f[2] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{4\pi i k}{N}} = 0 (n \in \mathbb{Z})$

• Beispiel $n \neq 0 \wedge n \in \mathbb{N}$: $f[2] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2n\pi i k}{N}} = 0 (n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0)$

• Resultat: Zum konstanten Signal $c_k=1 (\forall_k)$ im Frequenzbereich gehört der direkte Diracimpuls (diskrete Dirackamm):

$$\delta_0[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & 1 \leq n < N \end{cases}$$

$$\delta_0[n] = \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \pmod{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta_0[n] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

- Zeitverzögerter Diracimpuls:

$$\delta_m[n] = \begin{cases} 1 & n \equiv m \pmod{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta_m[n] = \delta_0[n-m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i k(n-m)}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{e^{\frac{-2\pi i k m}{N}}}_{c_k} \cdot e^{\frac{2\pi i k n}{N}}$$

Im Frequenzbereich $c_k = \hat{\delta}_m[k] = e^{\frac{-2\pi i k m}{N}}$

- Beliebige N-periodisches Signal $f[n] (n \in \mathbb{Z})$

$$f[n] = f[0] \cdot \delta_0[n] + f[1] \cdot \delta_1[n] + \dots + f[N-1] \cdot \delta_{N-1}[n]$$

$$N \cdot f[k] = \left(1 + e^{\frac{2\pi i k}{N}} + e^{\frac{2\pi i \cdot 2k}{N}} + \dots + e^{\frac{2\pi i \cdot (N-1)k}{N}} \right) \cdot f[0] +$$

$$\left(1 + e^{\frac{-2\pi i k}{N}} \cdot e^{\frac{2\pi i k}{N}} + \dots + e^{\frac{-2\pi i k(N-1)}{N}} \cdot e^{\frac{2\pi i k(N-1)}{N}} \right) \cdot f[1] +$$

$$\dots$$

$$\left(1 + e^{\frac{-2\pi i k(N-1)}{N}} \cdot e^{\frac{2\pi i k}{N}} + \dots + e^{\frac{-2\pi i k(N-1)^2}{N}} \cdot e^{\frac{2\pi i k(N-1)}{N}} \right) \cdot f[N-1]$$

$$N \cdot f[n] = \underbrace{(f[0] + \dots + f[n-1])}_{c_0 = \hat{f}[0]} + \underbrace{\left(f[0] + f[1] \cdot e^{\frac{-2\pi i k}{N}} + \dots + f[N-1] \cdot e^{\frac{-2\pi i k(N-1)}{N}} \right)}_{c_1 = \hat{f}[1]} \cdot e^{\frac{2\pi i k n}{N}} + \dots$$

$$f[n] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m] \cdot \left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{-2\pi i k m}{N}} \cdot e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \right) =$$

Konkreter Beweis:

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{N-1} f[m] \cdot e^{\frac{-2\pi i k m}{N}} \right)}_{c_k = \hat{f}[k]} \cdot e^{\frac{2\pi i k n}{N}}$$

$$\text{DFT: } \hat{f}[k] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m] \cdot e^{\frac{-2\pi i k m}{N}}$$

5. Signale im Zeit- und Frequenzbereich

Gegeben ist ein N-dimensionales Signal f , abstrakt als Element eines Vektorraums (wir können solche Signale überlagern: addieren, strecken \rightarrow Linearkombination bilden).

- Beschreibung im Zeitbereich durch die Abtastwerte $[f[0], \dots, f[N-1]]$
- Beschreibung im Frequenzbereich durch die Fourierkoeffizienten $c_k = \hat{f}[k]$, also durch den Vektor $[\hat{f}[0], \dots, \hat{f}[N-1]]$. Physikalisch deutbar mit Resonanzphänomenen. Schwingungsfähige Systeme werden durch das Signal zum Mitschwingen angeregt und zwar in der Frequenz k je stärker, desto grösser $|c_k|$ ist.

Das Argument von c_k hängt mit der Zeitverzögerung (Phase) der anregenden und der unangeregten Schwingung zusammen.

Mathematische Deutung: Die $f[k]$ und $\hat{f}[k]$ sind die Koeffizienten der Darstellung von f in spezifischer Basis von Grundsignalen (orthogonal):

- Zeitbereich: $f = \sum_{m=0}^{N-1} f[m] \cdot \delta_m$ (δ_m : Zeitverzögerter Diracimpuls)
- Frequenzbereich: $f = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] \cdot e_k$ (e_k : k -te harmonische Schwingung)

Wir versuchen die linearen Kenngrößen $f[n]$ und $\hat{f}[n]$ zu verstehen, indem wir

- Beispiele von Signalen in Zeit- und Frequenzbereich betrachten
- Eigenschaften von Signalen in Zeit- und Frequenzbereich untersuchen
- Die Verarbeitung von Signalen in Zeit- und Frequenzbereich untersuchen

Beispiele (alle Dimensionen N, N=1000)

1. Konstantes Signal der Stärke 1

$$f = [1, 1, 1, 1, \dots, 1] (f[n] = 1 \text{ für alle } n)$$

$$\hat{f} = [1000, 0, 0, 0, \dots, 0] (f[n] = \frac{1}{1000} \cdot \underbrace{1000}_{\hat{f}[n]} \cdot e^{\frac{2\pi i 0 n}{N}})$$

2. Kosinusschwingung (in Beispiel k=10)

$$f = \left[\cos\left(\frac{2\pi k 0}{N}\right), \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \dots, \cos\left(\frac{2\pi k(N-1)}{N}\right) \right]$$

$$\hat{f} = [0, \dots, 500, 0, \dots, 0, 500, 0, \dots, 0]$$

6. Signalverarbeitung

Input des Prozesses ist ein Signal, der Output ebenfalls. Die wichtigste Methode der Signalverarbeitung ist die **Signalfilterung**.

Ein Filter A ist eine lineare, zeitinvariante Signalvorverarbeitung.

Die Signalverarbeitung A heisst **linear**, wenn

$$A(f + g) = Af + Ag$$

$$A(\lambda \cdot f) = \lambda(Af)$$

6.1. Anwendung der Eigenschaften

Wir setzen ein beliebiges Signal f aus Grundsignalen zusammen, nämlich aus Linearkombinationen und müssen deshalb neu wissen, wie die Grundsignale - z.B. (Zeitbereich) die Diracimpulse δ_m ($m \in \mathbb{Z}$) - verarbeitet werden.

Jedes diskrete Signal ist (unendlich) Linearkombination von Diracimpulsen $\left(\delta_m[n] = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right)$.

$$f = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] \cdot \delta_m$$

$$Af = A\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] \cdot \delta_m \right)$$

$$Af = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A(f[m] \cdot \delta_m)$$

$$Af = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] \cdot (A\delta_m)$$

6.2. Filterung von Diracimpulsen

Die Signalverarbeitung A heisst **zeitinvariant**, wenn sie mit Zeitverzögerung

$$\begin{aligned}(Z_m f)[n] &= f[n-m] \\ (Z_m f)[n+m] &= f[n]\end{aligned}$$

kommutiert

$$A(Z_m f) = Z_m(Af)$$

für alle $m \in \mathbb{Z}$.

Verarbeitung des Diracimpulses δ_0 mit dem Filter A:

$$(A\delta_0)[n] = a[n]$$

Der Output ist ein **Signal** $a[n]$ ($n \in \mathbb{Z}$), die **Impulsantwort des Filters A**.

Verarbeitung von δ_m mit A:

$$\begin{aligned}\delta_m &= Z_m \delta_0 \\ \delta_m[n] &= \delta_0[n-m]\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}A\delta_m &= A(Z_m \delta_0) = Z_m(A\delta_0) = Z_m a \\ A\delta_m &= a[n-m]\end{aligned}$$

Filterung des beliebigen Signal $f = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]\delta_m$

$$Af = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]A\delta_m$$

$$Af = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m](Z_m a)$$

Zur Zeit n:

$$Af[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]a[n-m]$$

Die Filterung mit A ist bereits durch die Impulsantwort $a = A\delta_0$ vollständig bestimmt. Das gefilterte Signal ergibt sich als **Faltung** (Faltungsprodukt)

$$(a * f)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] \cdot a[n-m]$$

des Signals f der Impulsantwort a von A.

6.2.1. Beispiel 1

$$a[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 2 & n=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{d.h. } a = \delta_0 + 2\delta_1)$$

$$(a * f)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]a[n-m] = \dots 0+0+0+2f[n-1]+f[n]+0+0+0+\dots$$

$$(a * f)[n] = f[n] + 2f[n-1]$$

6.2.2. Beispiel 2: Mittelwertfilter (kausal) der Länge N

$$a[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} & n=0, 1, 2, 3, 4, \dots, N-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \delta_m$$

Wirkung:

$$(a * f)[n] = \frac{1}{N} (f[n] + f[n-1] + \dots + f[n-N+1])$$

6.2.3. Beispiel 3: Differenzenfilter

$$(a * f)[n] = f[n] - f[n-1]$$

6.3. Filterung / Faltung mit Matlab

Vorsicht: Bei der Faltung werden die Signalvektoren mit 0 auf \mathbb{Z} erweitert (im Gegenteil zur DFT, wo die Signale periodisch fortgesetzt werden). -> zero padding

Filter mit Impulsantwort $a = [1, -1]$ entspricht dem Signal

$$a[n] = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ -1 & (n=1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

6.3.1. Beispiele von Faltungen

$$f = [1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 3, 2, 1]$$

$$\check{a} = [-1, 1]$$

$$\text{corr}(\check{a}, f) = a * f = [1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1] \quad (\text{Differenzen Operator})$$

$$\check{a} = [-1, 1]$$

$$a * (a * f) = [1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$$

6.4. Filterung im Frequenzbereich

(Signale werden als Überlagerung harmonischer Schwingungen dargestellt)

$$e_\omega = e^{i\omega n} \quad (n \in \mathbb{Z}; \omega \in [0, 2\pi[; \text{Parameter})$$

$$(a * e_\omega)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega(n-k)} a[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega n} e^{-i\omega k} a[k] = e^{i\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k} a[k]$$

7. Matlab Befehle

| Befehl | Beschreibung |
|-------------------|--|
| plot | Plottet einen Graph |
| linspace(x, y, z) | Gibt Vektor im Intervall von x bis y mit z Abtastungen (steps) |
| kron | Kroneggerprodukt |
| conj | Konjugiert Matrix |
| tic; xxx; toc; | Gibt Zeit aus, welche für den oder die Befehle xxx gebraucht wird. |

| Befehl | Beschreibung |
|---------------|--------------------------------|
| fft | Schnelle Fouriertransformation |

Weitere Informationen in der Help von Matlab!

8. Stichwortverzeichnis

| | | | |
|---|-----|----------------------------------|----|
| Abtastfrequenz..... | 3 | Informationsverlust..... | 2 |
| Abtastkreisfrequenz..... | 3 | Matlab..... | 2 |
| Abtastperiode..... | 2f. | Matlab Befehle..... | |
| Algebraische Untersuchung..... | 4 | conj..... | 10 |
| Alias..... | 4 | fft..... | 10 |
| bandbegrenzter..... | 4 | kron..... | 10 |
| Audiosignal..... | 2 | linespace..... | 10 |
| DFT..... | 6 | plot..... | 10 |
| Diracimpuls..... | 6 | tic..... | 10 |
| Diracimpulsen..... | 8 | toc..... | 10 |
| Diracimpulses..... | 9 | Nyquistfrequenz..... | 3 |
| Dirackamm..... | 6 | Nyquistkreisfrequenz..... | 3 |
| Direkter Diracimpuls..... | 6 | Radar..... | 4 |
| Diskrete Dirackamm..... | 6 | Schwingung..... | |
| Diskrete Fouriersynthese..... | 4 | diskret harmonisch..... | 3 |
| diskreten harmonischen Schwingungen.... | 5 | harmonisch..... | 2 |
| endliches diskretes Signal..... | 4 | kontinuierlich harmonisch..... | 3 |
| Faltung..... | 9 | Schwingungen..... | 5 |
| Faltungsprodukt..... | 9 | Signal..... | 4 |
| Fouriersynthese..... | 4 | Signalfilterung..... | 8 |
| Geometrische Interpretation..... | 3 | Signalvektor..... | 4 |
| Grundsignale..... | 8 | Signalverarbeitung..... | 8 |
| Harmonische Synthese..... | 5 | Synthese..... | 5 |
| Impulsantwort des Filters..... | 9 | Zeitverzögerter Diracimpuls..... | 6 |
| Informationsgehalt..... | 2 | | |