Die *projektive Ebene* erzeugen wir aus der euklidischen Ebene durch Hinzunahme einer Menge von virtuellen Punkten – den *Fernpunkten* der Ebene, die zusammen die *Ferngerade* bilden. Anschaulich können wir diese zweidimensionale Erweiterung im dreidimensionalen Raum vornehmen – und so finden wir auch geeignete Koordinaten für die Punkte der projektiven Ebene.

Projektive Erweiterung

Wir betten die *kartesische xy-Ebene* $\mathbb{R}^2$ als Ebene $w = 1$ in den dreidimensionalen kartesischen xyw-Raum $\mathbb{R}^3$ ein:

$$(x, y) \mapsto (x, y, 1) \in \{(x, y, w) \mid x, y, w \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3 \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Die *projektive xy-Ebene* $\mathbb{P}^2$ ist dann die Menge der Geraden durch den Ursprung $O_3 = (0, 0, 0)$ des xyw-Raumes.

- Die *eigentlichen Punkte* der Ebene $\mathbb{P}^2$ – also die Punkte in der kartesischen Ebene $w = 1$ – werden durch ihre Verbindungsgeraden mit O_3 repräsentiert. Zum Beispiel repräsentiert die w-Achse den Ursprung $O = (0, 0)$ der kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$ und die Raumdiagonale des Einheitswürfels im xyw-Raum den Punkt $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$.

- Die *Fernpunkte* der Ebene $\mathbb{P}^2$ werden durch die Geraden durch O_3 repräsentiert, die in der räumlichen xy-Ebene $w = 0$ liegen. Zum Beispiel repräsentiert die räumliche x-Achse den Fernpunkt U_x der x-Achse des $\mathbb{R}^2$. U_x ist auch der Fernpunkt aller zur x-Achse parallelen Geraden. Der Fernpunkt U_y der y-Achse im $\mathbb{R}^2$ wird durch die räumliche y-Achse repräsentiert.

Eine *(projektive) Gerade* g in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ wird durch eine Ebene durch O_3 im xyw-Raum repräsentiert. Die Geraden durch O_3 in dieser Ebene repräsentieren dabei die Punkte der Ebene $\mathbb{P}^2$, die zu g gehören.

- Die *eigentlichen Geraden* g der Ebene $\mathbb{P}^2$ – das sind die um ihren Fernpunkt U_g erweiterten Geraden der kartesischen Ebene $w = 1$ – werden durch ihre Verbindungsebene mit dem Punkt O_3 repräsentiert. Die Schnittgerade dieser Ebene mit der Ebene $w = 0$ repräsentiert insbesondere den Fernpunkt U_g von g. Zum Beispiel repräsentiert die xw-Ebene im Raum die projektive x-Achse in $\mathbb{P}^2$ und die yw-Ebene die projektive y-Achse.

- Die *Ferngerade* u der Ebene $\mathbb{P}^2$ wird durch die räumliche xy-Ebene $w = 0$ repräsentiert. Sie besteht aus allen Fernpunkten von $\mathbb{P}^2$.

Homogene Koordinaten

Wir beschreiben eine Gerade g durch den Ursprung O_3 des xyw-Raumes – also einen Punkt der projektiven xy-Ebene $\mathbb{P}^2$ – mit einem *Richtungsvektor*. Die Richtungsvektoren von g sind die von $\vec{0}$ verschiedenen Vektoren parallel zu g. Es ist nützlich, alle diese Vektoren als *homogenen Vektor* (Schreibweise mit eckigen Klammern) zu identifizieren:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda w \end{bmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Die reellen Zahlen x, y, w – die aber nicht eindeutig bestimmt sind – bilden zusammen die *homogenen Koordinaten* des durch die Gerade g repräsentierten Punktes von $\mathbb{P}^2$.

Ist $w \neq 0$, dann beschreibt der homogene Vektor

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/w \\ y/w \\ 1 \end{bmatrix}$$

den eigentlichen Punkt $\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}\right)$ der kartesischen xy-Ebene. Die homogenen Vektoren mit dritter Komponente $w = 0$ beschreiben die Fernpunkte der projektiven xy-Ebene.

- Den eigentlichen Punkt $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ von $\mathbb{P}^2$ können wir also einfach mit dem homogenen Vektor

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2$$

  beschreiben. Zum Beispiel die Punkte $O = (0, 0)$, $E_x = (1, 0)$ und $E_y = (0, 1)$ mit den homogenen Vektoren

$$O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad E_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad E_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Der homogene Vektor

$$U_g = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^2$$

beschreibt den Fernpunkt der eigentlichen Geraden $g \subset \mathbb{R}^2$ durch die Punkte O und $P = (x, y) \neq (0, 0)$. U_g ist auch der Fernpunkt aller zu g parallelen Geraden in $\mathbb{R}^2$. Die "homogenen Basisvektoren"

$$U_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad U_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

beschreiben insbesondere die Fernpunkte der x- und y-Achse.

Die homogenen Koordinaten eines Punkts $P \in \mathbb{P}^2$ sind nicht eindeutig bestimmt. Deshalb ist beim Rechnen mit homogenen Vektoren Vorsicht geboten. So ist die Summe von zwei homogenen Vektoren P und Q nicht eindeutig als homogener Vektor definiert. Je nachdem, welche homogenen Koordinaten für die Punkte $P, Q \in \mathbb{P}^2$ gewählt werden, wird der "homogene Summenvektor" irgend einen Punkt auf der Geraden durch P und Q repräsentieren.

Eindeutig bestimmt durch die Punkte P und Q in $\mathbb{P}^2$ ist hingegen die Menge aller Linearkombinationen

$$\lambda P + \mu Q \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

der zugehörigen homogenen Vektoren. Sind P und Q verschieden, dann beschreiben diese Linearkombinationen im xyw-Raum die Ebene mit den Richtungsvektoren P und Q durch O_3. In der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ repräsentieren also diese Linearkombinationen die Gerade g durch die Punkte P und Q, einschliesslich des Fernpunkts U_g. Diese *Parameterdarstellung* der Geraden $g \subset \mathbb{P}^2$ benötigt im Wesentlichen nur einen der beiden Parameter λ, μ als Laufvariable.

Alternativ kann eine Gerade g der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ auch mit einer *homogenen Koordinatengleichung*

$$ax + by + cw = 0$$

beschrieben werden. Im Raum gedeutet ist das eine Koordinatengleichung der Ebene durch O_3, welche die Gerade g repräsentiert.

- Die x-Achse in $\mathbb{P}^2$ wird durch die homogene Gleichung $y = 0$ repräsentiert, die dazu parallele Gerade $y = 1$ durch die Gleichung $y = w$.
- Die Ferngerade u von $\mathbb{P}^2$ wird durch die homogene Gleichung $w = 0$ beschrieben.

Projektive Transformationen

Eine invertierbare *lineare Abbildung* f des dreidimensionalen xyw-Raumes bildet homogene Vektoren eindeutig auf homogene Vektoren ab – also räumliche Geraden durch den Ursprung O_3 wieder auf solche Geraden. Aufgefasst als Abbildung der projektiven xy-Ebene $\mathbb{P}^2$ in sich ist f eine *projektive Transformation*. Im Raum bildet f auch Ebenen durch den Ursprung auf ebensolche ab. Projektive Transformationen von $\mathbb{P}^2$ sind deshalb *geradentreu*.

Umgekehrt ist jede stetige geradentreue Bijektion der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ eine projektive Transformation. Der Beweis dieser Tatsache ist aber nicht trivial.

Bei der Beschreibung einer projektiven Transformation mit Hilfe einer $(3,3)$-Matrix spielt es keine Rolle, mit welchem Vielfachen der Matrix gearbeitet wird. Wir beschreiben deshalb projektive Transformationen mit *homogenen Matrizen* (eckige Klammern):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \dots & a_{33} \end{bmatrix} = \lambda A \qquad (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Beispiele von projektiven Transformationen

- Jede *Translation* (*Parallelverschiebung*) der kartesischen xy-Ebene $\mathbb{R}^2$ ist eine projektive Transformation. Die homogene Matrix

$$T_{(a,b)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

beschreibt die Verschiebung von $\mathbb{R}^2$ mit dem Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, die Ferngerade u lässt sie punktweise fest (u ist eine *Fixpunktgerade*):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Die Drehung der Ebene $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ um den Ursprung O ist die projektive Transformation mit der homogenen Matrix

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die homogene Matrix

$$T_{(a,b)}R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & a \\ \sin\alpha & \cos\alpha & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

beschreibt eine Drehung von $\mathbb{R}^2$ um den Winkel α mit einem anderen Drehzentrum. Die Drehung mit Zentrum $Z = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ kann als "Konjugation" $T_{(a,b)}R_\alpha T_{(-a,-b)}$ realisiert werden. Es ist klar – sowohl anschaulich geometrisch wie auch algebraisch – dass alle diese Drehungen mit gegebenem Drehwinkel α dieselbe Wirkung auf die Ferngerade haben.

- Die homogene Matrizen mit dritter Zeile $\begin{bmatrix} 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ (und nur diese) lassen die Ferngerade u invariant (nicht punktweise, u ist nur *Fixgerade*):
$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Diese Transformationen sind also die *affinen* (*parallelentreuen*) Abbildungen der kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$.

- "Dual" dazu ist der Ursprung O ein Fixpunkt jeder homogenen Matrix mit dritter Spalte
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}.$$

Koeffizientenbestimmung von homogenen Matrizen

Bekanntlich können die Koeffizienten der Matrix A einer *linearen Abbildung* f des dreidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$ einfach bestimmt werden, wenn die Bildvektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ der Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ bekannt sind. Die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ sind gerade die Spaltenvektoren von A:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ a_{21} & * & * \\ a_{31} & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}.$$

Ist die lineare Abbildung f dadurch bestimmt, dass die Bilder $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ von drei beliebigen linear unabhängigen Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ gegeben sind, dann müssen wir zur Bestimmung der Matrix C von f ein lineares

Gleichungssystem lösen. Wir können dabei wie vorher vorgehen, wenn wir die Matrixinversion benützen, die in vielen Programmiersprachen implementiert ist. Die Matrix C ist das Produkt

$$C = AB^{-1}$$

der Matrix A mit den Spalten $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ und der inversen Matrix B^{-1} der Matrix B mit den Spalten $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$.

Projektive Transformationen als lineare Abbildungen im Raum

In der Theorie ist es vorteilhaft, die projektive Ebene $\mathbb{P}^2$ von Beginn weg als Menge der Geraden durch den Ursprung O_3 eines dreidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$ zu definieren und die projektiven Transformationen von $\mathbb{P}^2$ als lineare Abbildungen des $\mathbb{R}^3$ zu studieren. Diese werden durch gewöhnliche $(3, 3)$-Matrizen (runde Klammern) repräsentiert und werden üblicherweise so normiert, dass ihre Determinante gleich 1 ist. Für die projektive Geometrie ist dann nur die Wirkung dieser Abbildungen auf die Geraden durch O_3 wesentlich.

Es kann durchaus vorkommen, dass die lineare Abbildung des xyw-Raumes $\mathbb{R}^3$ anschaulicher und leichter zu interpretieren ist als die entsprechende projektive Transformation der projektiven xy-Ebene $\mathbb{P}^2$. Umgekehrt ist es aber nicht immer einfach, zu einer geometrisch bestimmten projektiven Transformation der Ebene $\mathbb{P}^2$ direkt eine entsprechende lineare Abbildung im Raum zu finden. Für einen Punkt $P \in \mathbb{P}^2$ (zum Beispiel den Punkt O) dürfen wir sein Bild im Raum (runde Klammern) als Vielfaches seines Bildes $\bar{P} \in \mathbb{P}^2$ (eckige Klammern) zwar vorgeben. Für alle andern Punkte in $\mathbb{P}^2$ ist das räumliche Bild dann aber bereits bestimmt und der entsprechende Streckungsfaktor für die homogenen Komponenten muss berechnet werden.

Direkt im Raum interpretieren können wir die *linearen Transformationen* der kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$ – also die parallelentreuen Abbildungen des $\mathbb{R}^2$, die auch den Ursprung O fest lassen. Im Raum lassen diese die xy-Ebene – die Ferngerade u von $\mathbb{P}^2$ – invariant. Die Einträge der Matrix A einer solchen Abbildung können dann so normiert werden, dass auch die Ebene $w = 1$ invariant bleibt – einfach indem $a_{33} = 1$ gesetzt wird. Die Ebene $w = 0$ wird dann genau gleich transformiert wie die Ebene $w = 1$ und die Koordinaten der Bilder $\bar{E}_x = (a_{11}, a_{21}) \in \mathbb{R}^2$ und $\bar{E}_y = (a_{12}, a_{22}) \in \mathbb{R}^2$ können als Bilder der räumlichen Einheitsvektoren direkt in die Abbildungsmatrix A eingetragen werden:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mit derselben Methode können wir auch die homogene Matrix einer beliebigen *affinen Transformation* der Ebene $\mathbb{R}^2$ bestimmen. Wir realisieren diese als Produkt TA einer linearen Abbildung A und einer Verschiebung T, die am Schluss noch den Ursprung O an die richtige Stelle $\bar{O} = (a_{13}, a_{23}) \in \mathbb{R}^2$ verschiebt:

$$TA = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{13} & a_{12} - a_{13} & a_{13} \\ a_{21} - a_{23} & a_{22} - a_{23} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wirkung von homogenen Matrizen auf homogene Vektoren

In der Praxis ist von einer projektiven Transformation f üblicherweise nur ihre Wirkung $f : P \mapsto \bar{P}$ auf gewisse Punkte P der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ bekannt. Dies ist insbesondere bei Problemstellungen aus dem Gebiet der *Photogrammetrie* der Fall.

Die Bildvektoren der Transformation sind nur als homogene Vektoren gegeben, ihre Komponenten sind deshalb nicht eindeutig bestimmt. Zum Beispiel liefert der Bildpunkt $\bar{U}_x$ des Fernpunktes U_x die erste Spalte der Transformationsmatrix A von f nur als homogenen Vektor:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & * & * \\ a_{21} & * & * \\ a_{31} & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}.$$

Die erste Spalte $\vec{a}_1$ (runde Klammern) der räumlichen Abbildungsmatrix ist also nur bis auf einen vorerst unbekannten Faktor $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bestimmt:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \bar{U}_x.$$

Problematisch ist dabei aber nur, dass sich die entsprechenden Faktoren μ und ν für die zweite und dritte Spalte der Matrix vom Faktor λ und auch voneinander unterscheiden können:

$$\vec{a}_2 = \mu \cdot \bar{U}_y \quad \text{und} \quad \vec{a}_3 = \nu \cdot \bar{O}.$$

Homogene Matrizen sind aber bis auf einen *gemeinsamen Faktor für alle Spalten* eindeutig bestimmt. Wir dürfen also nur einen dieser drei Faktoren frei wählen, die übrigen beiden Faktoren müssen wir aus den Abbildungseigenschaften der Transformation berechnen.

Abbildung und Verzerrung von zwei Geraden

Wir können eine projektive Transformation $f : P \mapsto \bar{P}$ der Ebene $\mathbb{P}^2$ – oder auch eine projektive Transformation zwischen zwei verschiedenen projektiven Ebenen – charakterisieren, indem wir angeben, wie die Punkte von zwei gegebenen Geraden $g \subset \mathbb{P}^2$ und $h \subset \mathbb{P}^2$ abgebildet werden.

Dazu legen wir zuerst den Bildpunkt $\bar{S}$ des Schnittpunktes S von g und h fest. Nach der Angabe der Bildpunkte $\bar{A}$ und $\bar{C}$ von je einem weiteren Punkt $A \in g \setminus \{S\}$ und $C \in h \setminus \{S\}$ auf den Geraden sind die Bildgeraden $\bar{g}$ und $\bar{h}$ bestimmt (und auch die Bildgerade der Geraden durch A und C). Durch die Vorgabe des Bildpunktes $\bar{B} \in \bar{g}$ von noch einem Punkt $B \in g \setminus \{S, A\}$ wird festgelegt, wie die Gerade g bei der Abbildung $g \to \bar{g}$ verzerrt wird. Der Bildpunkt $\bar{D} \in \bar{h}$ eines weitern Punktes $D \in h \setminus \{S, C\}$ bestimmt, wie die Gerade h verzerrt wird. Mit diesen Vorgaben ist dann die Abbildung f in der ganzen Ebene $\mathbb{P}^2$ eindeutig bestimmt.

- In der *Photogrammetrie* liegt diese Situation etwa vor, wenn in einer Photographie der Horizontalebene zwei Koordinatenachsen mit je einem vom Ursprung verschiedenen Punkt abgebildet sind und ausserdem der Horizont sichtbar ist. Dann können wir mit der Inversen A^{-1} der entsprechenden Transformationsmatrix A das Abbild der Horizontalebene *entzerren*.

Wir bestimmen nun die Transformationsmatrix einer solchen Abbildung $P \mapsto \bar{P}$ im einfachsten Falle:

- Bekannt sind die Bildpunkte des Ursprungs O, der Punkte E_x und U_x auf der x-Achse und der Punkte E_y und U_y auf der y-Achse.

- Die beiden *Fluchtpunkte* $\bar{U}_x$ und $\bar{U}_y$ und der Bildpunkt $\bar{O}$ des Ursprungs bestimmen die Spalten $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ der Transformationsmatrix als *homogene Vektoren* (eckige Klammern). Die Bildgeraden der x- und y-Achse und die Fluchtgerade $\bar{u}$ sind dadurch bereits bestimmt und deshalb unabhängig von der Normierung der Spalten.

- Nach der *Wahl von homogenen Koordinaten* – beispielsweise der Normierung der dritten Komponente zu 1 – sind die Spaltenvektoren $\bar{U}_x$, $\bar{U}_y$ und $\bar{O}$ (runde Klammern!) eindeutig bestimmt. Für den Eintrag in die Matrix A müssen wir sie noch mit korrekten Faktoren λ, μ und ν normieren:
$$\vec{a}_1 = \lambda \bar{U}_x, \quad \vec{a}_2 = \lambda \bar{U}_y, \quad \vec{a}_3 = \nu \bar{O}.$$

- Die Bildpunkte der Skalierungspunkte E_x und E_y auf den Koordinatenachsen bestimmen die Spaltensummen $\vec{a}_1 + \vec{a}_3$ und $\vec{a}_2 + \vec{a}_3$ ebenfalls als homogene Vektoren. Nach der Wahl von homogenen Koordinaten müssen wir sie deshalb noch normieren:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_3 = \alpha \bar{E}_x \quad \text{und} \quad \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \beta \bar{E}_y.$$

  Damit erhalten wir die *gesuchten homogenen Gleichungen* für die Faktoren λ, μ und ν:

$$\alpha \bar{E}_x = \lambda \bar{U}_x + \nu \bar{O} \quad \text{und} \quad \beta \bar{E}_y = \mu \bar{U}_y + \nu \bar{O}.$$

- Die Gleichungssysteme sind überbestimmt – die Punkte $\bar{O}$, $\bar{E}_x$, $\bar{U}_x$ und $\bar{O}$, $\bar{E}_y$, $\bar{U}_y$ liegen je auf einer Geraden. Für die Lösung genügen die dritte und eine weitere Gleichung des Systems. Wenn wir – statt mit homogenen Gleichungen zu arbeiten – die dritte Spalte durch die Wahl von $\nu = 1$ zu $\vec{a}_3 = \bar{O}$ normieren, dann liefern diese Gleichungen die gesuchten Faktoren λ und μ explizit.

Beispiel Wir betrachten die projektive Transformation, welche die Punkte O, E_x und E_y fest lässt und die Fernpunkte U_x und U_y auf die eigentlichen Punkte $(2, 0) \in \mathbb{R}^2$ und $(0, 2) \in \mathbb{R}^2$ abbildet:

$$\bar{U}_x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \bar{U}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \ \bar{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \ \bar{E}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \bar{E}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir wählen $\nu = 1$ und erhalten die Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese überbestimmten Gleichungssysteme haben die Lösungen $\lambda = 1$ und $\mu = 1$. Damit sind die Spalten $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ als Vielfache von $\bar{U}_x$ und $\bar{U}_y$ bestimmt und ergeben die Transformationsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die (doppelte) inverse Matrix definiert die Entzerrung $\bar{P} \mapsto P$:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Geometrisch definieren die Matrizen A und A^{-1} *perspektive Kollineationen* der Ebene $\mathbb{P}^2$, mit Fixpunktgerade durch E_x und E_y und *Zentrum* O.

Im allgemeinen Fall, wo die projektive Transformation in der angegebenen Weise durch die Abbildung $g \to \bar{g}$ und $h \to \bar{h}$ von zwei beliebigen Geraden bestimmt ist, können wir Transformationsmatrix mit Hilfe der Matrixinversion finden: Wir bilden die x- und y-Achse wie beschrieben auf die Ausgangsgeraden g und h ab (homogene Matrix B) und ebenso auf die Bildgeraden $\bar{g}$ und $\bar{h}$ (homogene Matrix A). Die homogene Matrix AB^{-1} ist dann die gesuchte Transformationsmatrix.

Abbildung eines Vierecks

Wir können eine projektive Transformation $f : P \mapsto \bar{P}$ der Ebene $\mathbb{P}^2$ – oder zwischen zwei verschiedenen solchen Ebenen – charakterisieren, indem wir die Bildpunkte der vier Ecken A, B, C und D eines *allgemeinen Vierecks* (keine drei der vier Punkte sind kollinear) angeben.

- Dies ist die wichtigste Situation in der *Einbildphotogrammetrie*: Eine ebene Fläche wird zusammen mit einem *kalibrierenden Viereck* bekannter Gestalt photographiert – zum Beispiel einem Quadrat der Seitenlänge 1 Meter. Mit der entsprechenden Transformationsmatrix A können wir dann beliebige Punkte der Ebene – bestimmt durch ihre relative Lage zum gegebenen Viereck – im Bild lokalisieren. Umgekehrt können wir die wahre Gestalt von Figuren im Bild mit Hilfe der Entzerrungsmatrix A^{-1} ermitteln.

Wir bestimmen nun die Transformationsmatrix einer solchen Abbildung $P \mapsto \bar{P}$ im einfachsten Falle:

- Bekannt sind die Bildpunkte der Ecken O, E_x, E_y und $D = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ des Einheitsquadrats

- Wir könnten vorab die Fluchtpunkte $\bar{U}_x$ und $\bar{U}_y$ je als Schnittpunkte von gegenüberliegenden Seitengeraden des Bildquadrats berechnen und dann wie im vorherigen Abschnitt vorgehen.

- Die Bildpunkte $\bar{O}$, $\bar{E}_x$ und $\bar{E}_y$ definieren die dritte Spalte $\vec{a}_3$ und die Spaltensummen $\vec{a}_1 + \vec{a}_3$ und $\vec{a}_2 + \vec{a}_3$ der gesuchten Transformationsmatrix als homogene Vektoren. Nach der Wahl von homogenen Koordinaten müssen sie deshalb noch korrekt normiert werden:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_3 = \alpha \bar{E}_x, \quad \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \beta \bar{E}_y; \quad \vec{a}_3 = \nu \bar{O}.$$

- Entsprechend bestimmt der Bildpunkt $\bar{D}$ der vierten Quadratecke die Spaltensumme $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ als homgenen Vektor:
$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \gamma \bar{D}.$$
- Damit erhalten wir das *gesuchte homogene Gleichungssystem* für die Faktoren α, β, γ und ν:
$$\alpha \bar{E}_x + \beta \bar{E}_y = \gamma \bar{D} + \nu \bar{O}.$$
- Wählen wir in diesem homogenen Gleichungssystem den Faktor $\nu = 1$, also die Normierung $\vec{a}_3 = \bar{O}$, dann können wir das Gleichungssystem nach den unbekannten Faktoren α, β und γ auflösen und die Transformationsmatrix A bestimmen (der Faktor γ wird dafür nicht benötigt).
- Das Gleichungssystem kann auch in Matrizenform geschrieben und mittels Matrixinversion gelöst werden.

Beispiel Wir behandeln noch einmal die projektive Transformation des vorherigen Abschnitts, schreiben aber diesmal die Bilder der Ecken des Einheitsquadrats vor:
$$\bar{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ \bar{E}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \bar{E}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};\ \bar{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
Wählen wir $\nu = 1$, dann erhalten wir das Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma \\ 2\gamma \\ 3\gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
mit der Lösung $\alpha = 2$, $\beta = 2$ (und $\gamma = 1$). Aus den Gleichungen
$$\vec{a}_1 + \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a}_1 + \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
erhalten wir die Spalten $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ durch Subtraktion von $\vec{a}_3 = \bar{O}$:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Auch hier können wir im Fall – wo ein beliebiges Vierecks abgebildet werden muss – die Transformationsmatrix mit dieser Methode als Produkt AB^{-1} bestimmen.