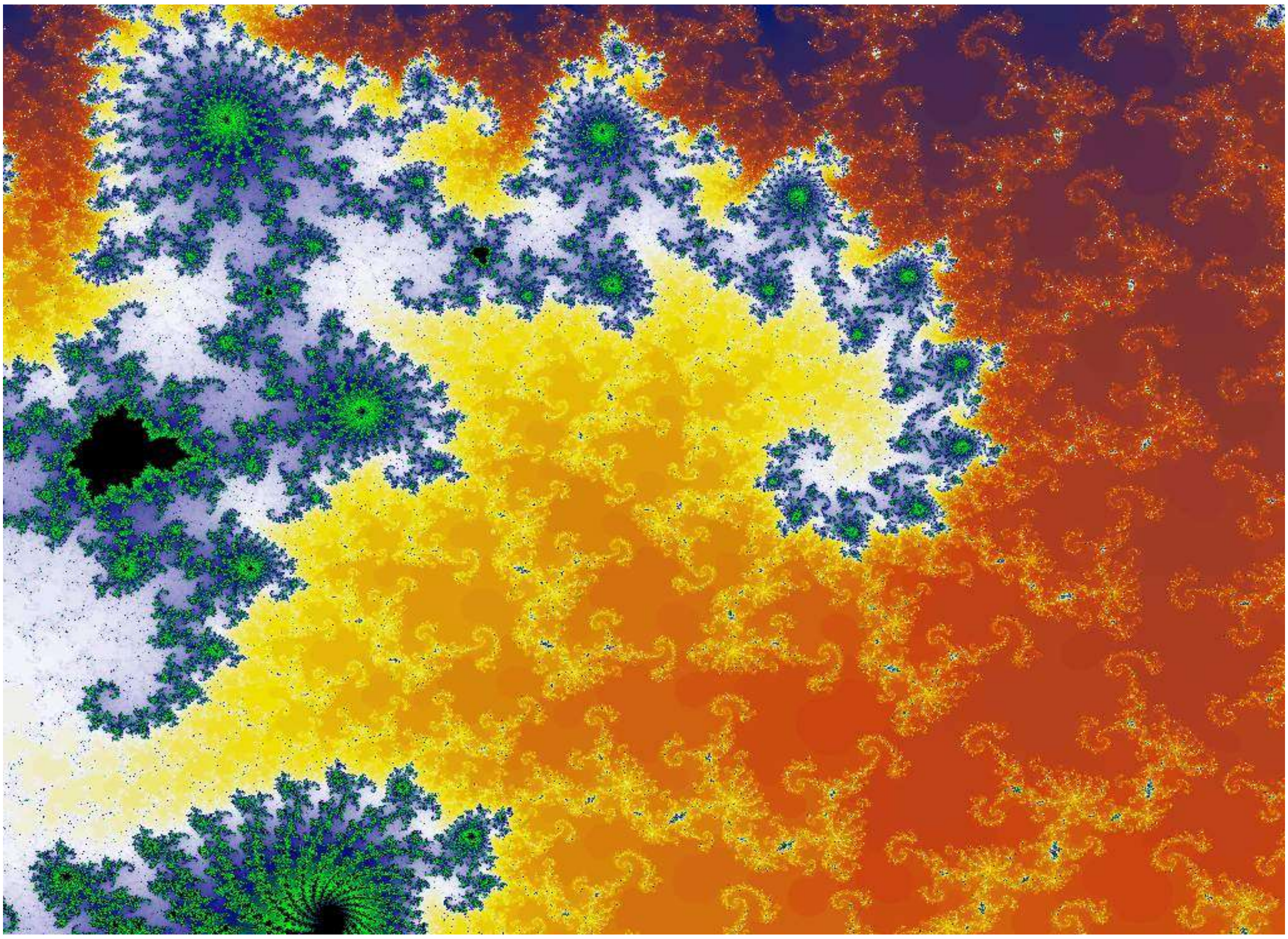
Komplexe Zahlen



P. Matusz

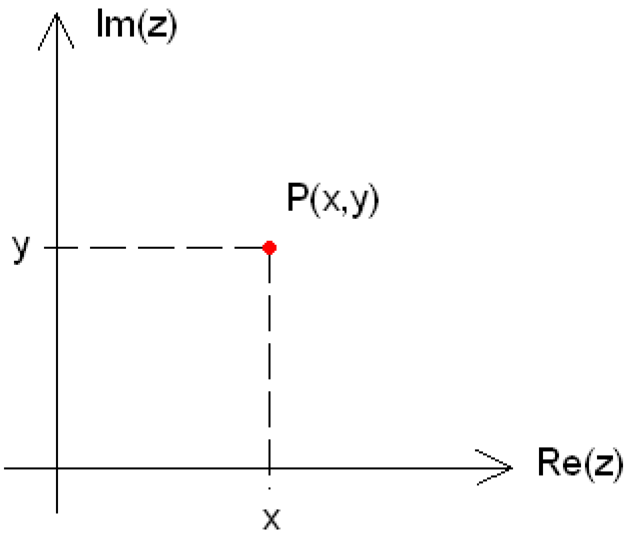
1.Inhalt

2.Einleitung

Komplexe Zahlen dienen dazu auch die restlichen unbekannten Lösungen hervorzuholen (z.B. $\sqrt{-1}$).

3.Darstellung einer komplexen Zahl

Algebraische oder kartesische Form



$z=x+iy$

i: Imaginäre Einheit $i^2=-1$

x: Realteil von z ($\Re(z)=x$)

y: Imaginärteil von z ($\Im(z)=y$)

Beispiel einer komplexen Zahl:

- $z=2+3i$

Der Abstand zum Ursprung ist der Betrag der komplexen Zahl:

$$|z|=\sqrt{(x^2+y^2)}$$

Beispiel zum Betrag:

- $z=2+3i \rightarrow |z|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

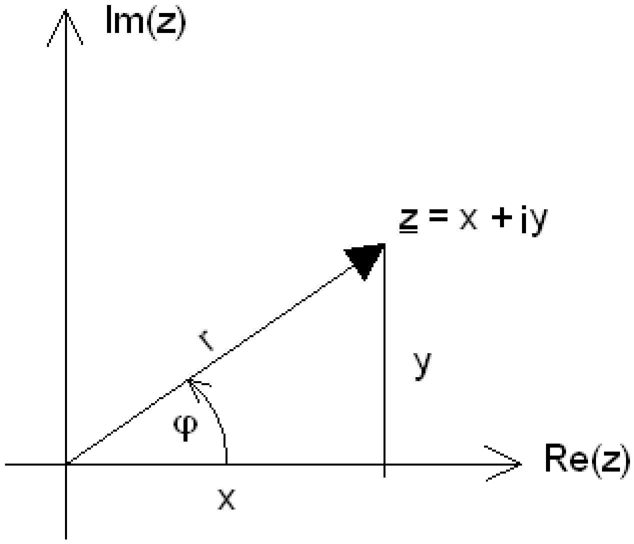
Die konjugiert komplexe Zahl ist:

$$\overline{z}=\overline{x+iy}=x-iy$$

Beispiel zur konjugiert komplexe Zahl:

- $z=2+3i \rightarrow \overline{z}=2-3i$

Polarform



Trigonometrische Form

$$z=r(\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi))$$

r: Betrag von z ($r=\overline{z}$)

φ: Argument (Winkel) von z

Beispiel zur trigonometrischen Form:

- $z=3\cdot(\cos(\frac{\pi}{4})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}))$

Konjugiert komplexe Zahl:

$$\overline{z}=r(\cos(\varphi)-i\cdot\sin(\varphi))$$

Beispiel zur konjugiert komplexen Zahl in trigonometrisches Form:

- $z=3\cdot(\cos(\frac{\pi}{4})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}))\rightarrow\overline{z}=3\cdot(\cos(\frac{\pi}{4})-i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}))$

Exponentialform

$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$

r: Betrag von z ($r = \overline{z}$)

φ: Argument (Winkel) von z

Beispiel zur Exponentialform:

- $z = 3 \cdot e^{\frac{i \cdot \pi}{4}}$

Konjugiert komplexe Zahl:

$\overline{z} = r \cdot e^{-i \cdot \varphi}$

Beispiel zur konjugiert komplexen Zahl in trigonometrisches Form:

- $z = 3 \cdot e^{\frac{i \cdot \pi}{4}} \rightarrow \overline{z} = 3 \cdot e^{\frac{-i \cdot \pi}{4}}$

Eulersche Formel

$e^{i \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$

$e^{-i \cdot \varphi} = \cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi)$

Umrechnungshilfen

$r = |z| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$

$$\varphi = \left\{ \begin{array}{ccc} \arctan(\frac{y}{x}) & wenn & x > 0 \, und \, y > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & wenn & x < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + 2\pi & wenn & x > 0 \, und \, y < 0 \end{array} \right\}$$

$x = r \cdot \cos(\varphi)$

$y = r \cdot \sin(\varphi)$

Beispiel kartesische Form in Exponentialform:

- $z = 2 + 2i \rightarrow r = 2 \cdot \sqrt{2} \, und \, \varphi = \arctan(\frac{2}{2}) \rightarrow z = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\frac{i \cdot \pi}{4}}$

Beispiel Exponentialform in kartesische Form:

- $z = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\frac{i \cdot \pi}{4}} \rightarrow x = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) = 2 \, und \, y = 2 \cdot \cos(\frac{\pi}{4}) = 2 \rightarrow z = 2 + 2i$

Wichtige Gleichungen

- $\sqrt{-1} = i$
- $i^2 = -1$

4.Grundrechenarten

Addition + Subtraktion

$$z_1+z_2=(x_1+i\cdot y_1)+(x_2+i\cdot y_2)=(x_1+x_2)+i\cdot(y_1+y_2)$$

Geometrische Deutung:

Die Zeiger z_1 und z_2 werden wie in der Vektorrechnung geometrisch addiert und subtrahiert.

Beispiel:

- $(2+3i)+(4+5i)=(2+4)+(3+5)i=6+8i$

Multiplikation

In kartesischer Form:

$$z_1\cdot z_2=(x_1+i\cdot y_1)\cdot(x_2+i\cdot y_2)=(x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2)+i\cdot(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1)$$

Beispiel:

- $(2+3i)\cdot(1+2i)=2\cdot 1+2\cdot 3i+3i\cdot 1+3i\cdot 2i=2+6i+3i+6i^2=2+9i-6=-4+9i$

In Polarform:

$$z_1\cdot z_2=(r_1\cdot e^{i\cdot\varphi_1})\cdot(r_2\cdot e^{i\cdot\varphi_2})=r_1\cdot r_2\cdot e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Beispiel:

- $2\cdot e^{\frac{\pi}{2}\cdot i}\cdot 3\cdot e^{\frac{\pi}{6}\cdot i}=2\cdot 3\cdot e^{\frac{\pi}{2}\cdot i}\cdot e^{\frac{\pi}{6}\cdot i}=6\cdot e^{(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})\cdot i}=6\cdot e^{\frac{2\cdot\pi}{3}\cdot i}$

Geometrische Deutung:

Multiplikation (strecken) der Beträge (r_1 und r_2) und Addition der Argumente (Winkel / φ_1 und φ_2)

Division

Ich verzichte hier auf die kartesische Form, deshalb hier nur die Polarform:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(r_1\cdot e^{i\cdot\varphi_1})}{(r_2\cdot e^{i\cdot\varphi_2})}=\frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i\cdot(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Beispiel:

- $\dfrac{2\cdot e^{\frac{\pi}{2}\cdot i}}{3\cdot e^{\frac{\pi}{6}\cdot i}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}\cdot i}}{e^{\frac{\pi}{6}\cdot i}}=\dfrac{2}{3}\cdot e^{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})\cdot i}=\dfrac{2}{3}\cdot e^{\frac{\pi}{3}\cdot i}$

Geometrische Deutung:

Division (strecken) der Beträge (r_1 und r_2) und Subtraktion der Argumente (Winkel / φ_1 und φ_2)

Potenzieren

In Polarform:

$$z^n=(r\cdot e^{i\cdot\varphi})^n=r^n\cdot e^{i\cdot\varphi\cdot n}$$

Beispiel:

- $(2\cdot e^{\frac{\pi}{3}\cdot i})^3=2^3\cdot(e^{\frac{\pi}{3}\cdot i})^3=8\cdot e^{\frac{3\cdot\pi}{3}\cdot i}=8\cdot e^{\pi\cdot i}$

Wurzelziehen

In Polarform:

$$a_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r\cdot e^{i\cdot\varphi}}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i\cdot\varphi}{n}+\frac{2\cdot\pi\cdot k}{n}} \quad \text{wobei} \quad k=0,1,\dots,n-1$$

Das heisst es gibt beim Wurzelziehen **immer** n Lösungen.

Beispiel:

- $\sqrt{5\cdot e^{\frac{2\cdot\pi}{3}\cdot i}}=\left\{\begin{array}{c}\sqrt{5}\cdot e^{\frac{\pi}{3}\cdot i}\\ \sqrt{5}\cdot e^{(\frac{\pi}{3}+\pi)\cdot i}=\sqrt{5}\cdot e^{\frac{4\cdot\pi}{3}\cdot i}\end{array}\right\}$

- $\sqrt[8]{5\cdot e^{\frac{2\cdot\pi}{3}\cdot i}}=\left\{\begin{array}{c}\sqrt[8]{5}\cdot e^{\frac{2\cdot\pi}{3\cdot 8}\cdot i}=\sqrt[8]{5}\cdot e^{\frac{\pi}{12}\cdot i}\\ \sqrt[8]{5}\cdot e^{(\frac{\pi}{12}+\frac{2\cdot\pi}{8})\cdot i}+\sqrt[8]{5}\cdot e^{\frac{\pi}{3}\cdot i}\\ \sqrt[8]{5}\cdot e^{(\frac{\pi}{12}+\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{8})\cdot i}+\sqrt[8]{5}\cdot e^{\frac{7\cdot\pi}{12}\cdot i}\\ \sqrt[8]{5}\cdot e^{(\frac{\pi}{12}+\frac{2\cdot 3\cdot\pi}{8})\cdot i}+\sqrt[8]{5}\cdot e^{\frac{5\cdot\pi}{6}\cdot i}\\ \sqrt[8]{5}\cdot e^{(\frac{\pi}{12}+\frac{2\cdot 4\cdot\pi}{8})\cdot i}+\sqrt[8]{5}\cdot e^{\frac{13\cdot\pi}{12}\cdot i}\\ \sqrt[8]{5}\cdot e^{(\frac{\pi}{12}+\frac{2\cdot 5\cdot\pi}{8})\cdot i}+\sqrt[8]{5}\cdot e^{\frac{4\cdot\pi}{3}\cdot i}\\ \sqrt[8]{5}\cdot e^{(\frac{\pi}{12}+\frac{2\cdot 6\cdot\pi}{8})\cdot i}+\sqrt[8]{5}\cdot e^{\frac{19\cdot\pi}{12}\cdot i}\\ \sqrt[8]{5}\cdot e^{(\frac{\pi}{12}+\frac{2\cdot 7\cdot\pi}{8})\cdot i}+\sqrt[8]{5}\cdot e^{\frac{11\cdot\pi}{6}\cdot i}\end{array}\right\}$

5.Komplexe Funktionen

Exponentionalfunktion e^z

$$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} \quad \text{(Taylor Reihe) oder} \quad e^z=e^{r\cdot e^{i\cdot\varphi}}=e^{i\cdot\varphi\cdot r\cdot e}$$

Kosinus $\cos(z)$

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

Sinus $\sin(z)$

$$\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

6.Quadratische Gleichung

$az^2+bz+c=0$ gibt folgende Lösungen $z_{1,2}=\left\{\begin{array}{cc} \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & wenn \quad b^2-4ac>0 \\ \frac{-b}{2a} & wenn \quad b^2-4ac=0 \\ \frac{-b\pm i\cdot\sqrt{4ac-b^2}}{2a} & wenn \quad b^2-4ac<0 \end{array}\right\}$

7.Beispiele

- Suche Lösungen zu folgender Gleichung: $(z+1)^3+2+2i=0$
  - Substitution: $z+1=y\rightarrow y^3+2+2i=0$
  - $2+2i$ in Polarform umwandeln $2+2i=2\cdot\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}\cdot i}$
  - Umformen: $y^3=-2\cdot\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}\cdot i}$
  - Ausrechnen: $y=\sqrt[3]{-2\cdot\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}\cdot i}}$
  - Wurzeln berechnen
  - In Normalform zurückwandeln
  - Substitution rückgängig machen

8.Literaturhinweis

- Mathematische Formelsammlung, Lothar Papula
- Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2, Lothar Papula