Fourier-Reihen

P. Matusz

1. Inhalt

2. Einleitung

In einfachen Fällen lässt sich eine zeitlich periodischer Vorgang wie zum Beispiel die Schwingung eines Federpendels durch ein Sinusgesetz beschreiben. In den naturwissenschaftlichen-technischen Anwendungen treten jedoch häufig auch zeitabhängige Vorgänge auf, welche zwar periodisch, aber nicht mehr sinusförmig verlaufen:

- Kippschwingungen
- Sinusimpuls

Das Interesse bezieht sich nun auf das Zusammensetzen von harmonischen Einzelschwingungen, welche uns dann das gesuchte Resulat liefern sollen.

Vom physikalischen Standpunkt aus bedeutet die Darstellung einer nicht sinusförmigen Schwingung $y=y(t)$ durch ihre **Fourier-Reihe** eine **Zerlegung der Schwingung** in ihre harmonischen Schwingungskomponenten.

3. Harmonische Schwingungen

Allgemeine harmonische Schwingungen der Kreisfrequenz ω (Frequenz $f=\frac{\omega}{2\pi}$, Periode $T=\frac{2\pi}{\omega}$).

$$f(t)=a_1\cdot\cos(\omega t)+b_1\cdot\sin(\omega t)$$

In der Praxis sind $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, in der Theorie $a_1, b_1 \in \mathbb{C}$. Dieselbe Schwingung können wir auch als Überlagerung der komplexen harmonischen Grundschwingung $e^{i\omega t}$ und $e^{-i\omega t}$ der Kreisfrequenz ω darstellen,

$$f(t)=c_1\cdot e^{i\omega t}+c_{-1}\cdot e^{-i\omega t}$$

nämlich (Eulerformel):

$$f(t)=a_1\cdot\cos(\omega t)+b_1\cdot\sin(\omega t)$$

$$f(t)=a_1\cdot\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}+b_1\cdot\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2}$$

$$f(t)=\frac{a_1-b_1 i}{2}\cdot e^{i\omega t}+\frac{a_1+b_1 i}{2}\cdot e^{-i\omega t}$$

Also:

$$\boxed{c_1=\frac{a_1-b_1 i}{2}};\ \boxed{c_{-1}=\frac{a_1+b_1 i}{2}}$$

Insbesondere ist das Signal $f(t)$ reell ($a_1, b_1 \in \mathbb{R}$), wenn Vermutung (nach Maple-Experiment).

Jede reelle harmonische Schwingungen

$$f(t)=a_1\cdot\cos(\omega t)+b_1\cdot\sin(\omega t) \quad (a_1, b_1\in\mathbb{R})$$

ist darstellbar als phasenverschobene Sinusschwingung

$$f(t)=A\cdot\sin(\omega t+\varphi_0) \quad (A>0, \varphi_0\in[0, 2\pi])$$

Hierbei ist A die **Amplitude** und φ_0 die **Nullphase** der Schwingung.

<u>Begründung 1</u> (umgekehrt, bzw. Ansatz):

$$f(t)=A\cdot\sin(\omega t+\varphi_0)$$

$$f(t)=\underbrace{A\cdot\sin(\varphi_0)}_{a_1}\cdot\cos(\omega t)+\underbrace{A\cdot\cos(\varphi_0)}_{b_1}\cdot\sin(\omega t)$$

Gleichungssystem:

$$A\cdot\sin(\varphi_0)=a_1|()^2$$

$$A\cdot\cos(\varphi_0)=b_1|()^2$$

$$\tan(\varphi_0)=\frac{a_1}{b_1}$$

$$A^2=a_1{}^2+b_1{}^2$$

$$A=\sqrt{(a_1{}^2+b_1{}^2)}$$

<u>Begründung 2</u> (Umweg über das Komplexe):

$$a_1\cdot\cos(\omega t)+b_1\cdot\sin(\omega t)=a_1\cdot\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})+b_1\cdot\sin(\omega t)$$

$$=\mathrm{Im}(a_1\cdot e^{i(\omega t+\frac{\pi}{2})}+b_1\cdot e^{i\omega t})$$

$$=\mathrm{Im}(e^{i\omega t}\cdot(a_1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}+b_1))$$

$$=\mathrm{Im}(e^{i\omega t}\cdot\underbrace{(a_1 i+b_1)}_{r\cdot e^{i\varphi_0}})$$

$$=\mathrm{Im}(\underbrace{r}_{A}\cdot e^{i\omega t}\cdot e^{i\varphi_0})$$

$$=\mathrm{Im}(A\cdot e^{i\omega t+i\varphi_0})$$

$$=A\cdot\sin(\omega t+\varphi_0)$$

also

$$A=|b_1+a_1 i|=\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}$$

$$\varphi_0=arg(b_1+a_1 i)$$

<u>Schlussbemerkung:</u> Die Überlagerung von beliebig vielen phasenverschobenen Sinusschwingungen der Kreisfrequenz ω :

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} A_k\cdot\sin(\omega t+\varphi_{0k}) \quad \text{wobei } (A_k\in\mathbb{R})$$

ist selber eine harmonische Schwingung

$$f(t)=A\cdot\sin(\omega t+\varphi_0)$$

4. Harmonische Synthese

Durch Überlagerung der harmonischen **Grundschwingungen** $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ der Periode T ($\omega T=2\pi$) erhalten wir nichts anderes als verstärkte und phasenverschobene harmonische Schwingungen der Periode T.

Periode T haben aber auch alle Polynome der beiden Grundschwingungen wie

$$\cos^2(\omega t),\sin(\omega t)\cos(\omega t),\cos^3(\omega t)\sin^2(\omega t),\ldots$$

und alle harmonischen **Oberschwingungen** der Periode T, also die Funktionen

$$\cos(k\omega t),\sin(k\omega t)\quad (k\in\mathbb{N})$$

und auch noch die konstante Funktion 1 (= $\cos(0\omega t)$)

Somit habe auch alle **trigonometrische Polynome** (vom Grade n)

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\cos(k\omega t)}_{\text{Kosinuspolynom}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}b_k\cdot\sin(k\omega t)}_{\textit{Sinuspolynom}}\quad (a_k,b_k\in\mathbb{C}\ oder\ a_k,b_k\in\mathbb{R})$$

Die Funktion $f(t)$ ist durch **harmonische Synthese** (mit Koeffizienten a_k,b_k) entstanden. Wenn die Funktion $f(t)$ sich tatsächlich so darstellen lässt, dann ist die Speicherung der Koeffizienten $a_k,b_k(k=0,..,n)$ sehr effizient (wird auch zur Datenkompression benutzt, zum Beispiel beim alten JPEG).

Frage: Erhalten wir viele T-periodische Funktionen mit dieser Methode?

Antwort (ohne Beweis): Ja, jede stetige Funktion lässt sich beliebig genau ,mit einem harmonischen Polynom approximieren (sicher innerhalb der Plot- oder Messgenauigkeit). Es gilt aber sogar, dass sich auch unstetige Funktionen, wie die Rechtecksbeschreibung, „beliebig genau" durch solche Polynome approximieren:

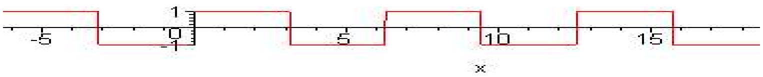
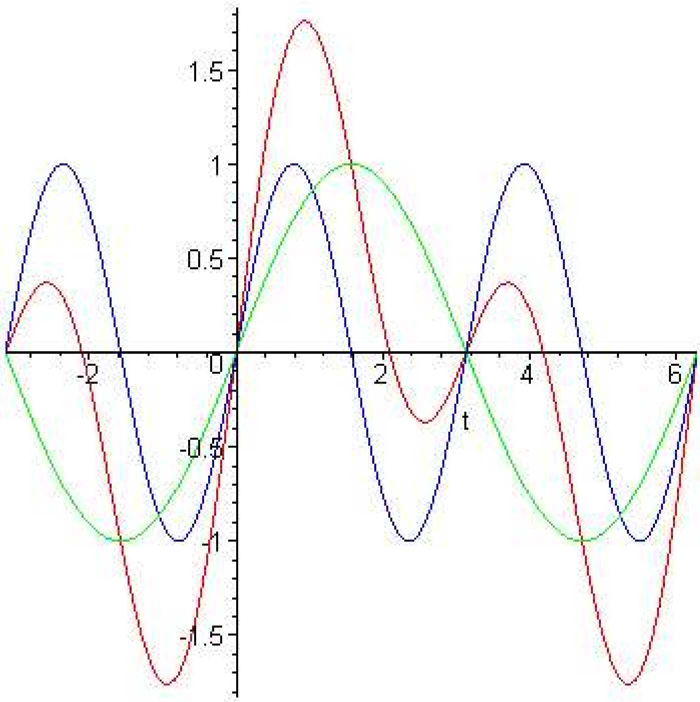


Abbildung 1: Rechtecksbeschreibung

Beispiel eines Sinuspolynoms (Grad 2): $f(t)=\sin(\omega t)+\sin(2\omega t)$



Für $\omega=1$:

Rot: $f(t)=\sin(1\cdot t)+\sin(2\cdot 1\cdot t)$

Grün: $f(t)=\sin(1\cdot t)$

Blau: $f(t)=\sin(2\cdot 1\cdot t)$

Diese Schwingung hat 4 Nulldurchgänge pro Periode, nämlich ($x=\omega t$)

$$\sin(x)+\sin(2x)=0$$

$$\sin(x)+2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)=0$$

$$\sin(x)(1+2\cdot\cos(x))=0$$

Also:

$$\sin(x)=0\rightarrow x=0,\pi\,(t=0,\frac{T}{2})$$

$$\cos(x)=-\frac{1}{2}\rightarrow x=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}(t=\frac{T}{3},\frac{2T}{3})$$

Maximale „Amplitude" von $f(x)$ (durch differentieren):

$$f'(x)=\cos(x)+2\cdot\cos(2x)=0$$

$$4\cdot\cos^2(x)+\cos(x)-2=0$$

$$\cos(x)_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{8}\approx\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{3}{4}\end{Bmatrix}$$

Jedes trigonomometrische Polynom vom Grade n besitzt auch eine komplexe Darstellung:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\cos(k\omega t)+\sum_{k=1}^{n}b_k\cdot\sin(k\omega t)\rightarrow f(t)=\sum_{k=-n}^{n}c_k\cdot e^{ik\omega t}\text{ wobei }c_k\in\mathbb{C}$$

als Überlagerung der komplexen harmonischen $e^{ik\omega t}$ Grund- und Oberschwingung.

Jedes Kosinuspolynom $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\cos(k\omega t)$ besitzt auch eine Darstellung der Form $f(t)=\sum_{k=0}^{n}A_k\cdot\cos^k(\omega t)$ als echtes Polynom mit den Variablen $z=\cos(\omega t)$. Die Darstellung als

Überlagerung von harmonischen Schwingungen ist aber fast immer vorteilhaft. Analog hat jedes Sinuspolynom $f(t)=\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \sin(k\omega t)$ eine Darstellung der Form: $f(t)=\sin(\omega t)\cdot \sum_{k=0}^{n-1} B_k \cdot \cos^k(\omega t)$.

Idee, um eine allgemeine Klasse von T-periodischen Funktionen $f(t)$ mit Hilfe von harmonischen Schwingungen darzustellen: Wir können versuchen, $N\rightarrow\infty$ streben lassen, und die Funktion $f(t)$ als konvergente **Fourier-Reihe** darstellen:

$$\boxed{f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ik\omega t}} \quad \text{wobei } c_k \in \mathbb{C}$$

oder

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega t)+\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k\omega t)$$

<u>Resultat:</u> Jede stückweise differentierbare Funktion lässt sich so exakt darstellen (natürlich mit Periode T).

Bei entsprechender Verallgemeinerung des Konvergenzbegriffes (z.B. Konvergenz im quadratischen Mittel) können auch stückweise stetige und noch allgemeinere Funktionen dargestellt werden.

5. Harmonische Analyse

In der Praxis kommt es nur selten vor, dass ein Signal

$$\boxed{f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t)+\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)}$$

direkt durch **harmonische Synthese** aus seinen **Fourierkoeffizienten** a_k, b_k erhalten sind. Viele Schwingungen in der Physik – zum Beispiel Sprachsignale – entstehen zwar tatsächlich als Überlagerung von Grund- und Obertönen $\sin(kwt-\delta)$ - und werden auch so gehört.

Meistens wird umgekehrt das Signal $f(t)$ gemessen – und es entsteht das Problem, ob sich dieses Signal überhaupt harmonisch synthetisieren lässt – und wie finden wir dann die zugehörigen Fourierkoeffizienten a_k, b_k (oder c_k) - und sind diese überhaupt eindeutig bestimmt.

$$\boxed{a_k(k\in\mathbb{N}_0), b_k(k\in\mathbb{N}_0) \begin{array}{c}\rightarrow \text{harmonische Synthese} \rightarrow \\ \leftarrow \text{harmonische Analyse} \leftarrow\end{array} f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(k\omega t)+b_k \sin(k\omega t))}$$

Wie finden wir aber zu dem gegebene T-periodischen Signal $f(t)$ „die" Fourierkoeffizienten a_k, b_k?

<u>**Vorüberlegung:**</u> Die Koeffizienten a_k, b_k eines trigonometrischen Polynoms vom Grade n sind eindeutig bestimmt:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega t)+\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(k\omega t)$$

durch die Werte $f(t)(t\in[0,T[)$

Wäre nämlich auch

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} A_k \cos(k\omega t)+\sum_{k=1}^{n} B_k \sin(k\omega t)$$

dann wäre also ($x=\omega t$)

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} A_k \cos(kx)+\sum_{k=1}^{n} B_k \sin(kx)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)+\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx) \text{ wobei } x\in\mathbb{R}$$

$$\frac{A_0-a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} (A_k-a_k)\cos(kx)=\sum_{k=1}^{n} (b_k-B_k)\sin(kx) \text{ wobei } \forall x\in\mathbb{R}$$

Durch Substitution von x nach -x:

$$\frac{A_0-a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} (A_k-a_k)\cos(kx)=-\sum_{k=1}^{n} (b_k-B_k)\sin(kx)$$

Addition der beiden vorrigen Formeln ergibt:

$$\frac{A_0-a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} (A_k-a_k)\cos(kx)=0$$

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k-B_k)\sin(kx)=0$$

Die Gleichung

$$\frac{A_0-a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} (A_k-a_k)\cos(kx)=0 \text{ wobei } \forall x\in\mathbb{R}$$

lässt sich umformen zu einer Gleichung der Form

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos^k(x)=0 \text{ wobei } \alpha_k=A_K-a_k\text{, } \alpha_k\neq 0 \text{ und } \forall x\in\mathbb{R}$$

Mit der Substitution $z=\cos(x)$ erhalten wir also die algebraische Gleichung

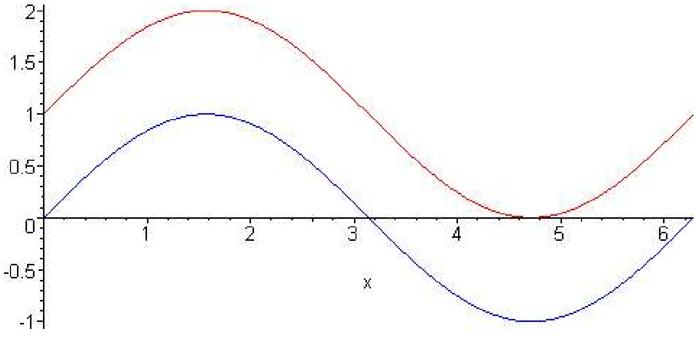
$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k=0$$

die genau n Lösungen $z\in\mathbb{C}$ besitzt, also höchstens n Lösungen $z\in[-1,1]$, also höchstens 2n Lösungen $x\in[0,2\pi[$. Die Gleichung muss aber füpr alle $x\in[0,2\pi[$ erfüllt sein – das ist nur für das Nullpolynom möglich:

$$\frac{A_0-a_0}{2}=0\rightarrow A_0=a_0$$

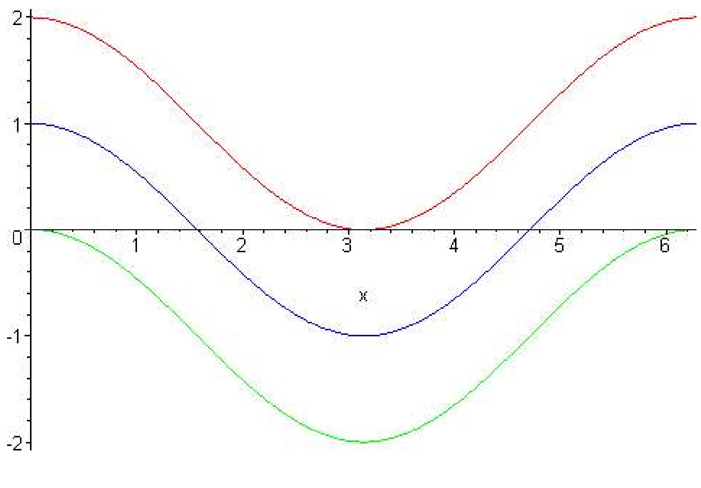
$$A_k-a_k=0\rightarrow A_k=a_k$$

Anderer Weg: Bedeutung des Koeffizienten a_0 (bzw. c_0): Addition der Konstanten a_0 (bzw. c_0) bewirkt eine vertikale Verschiebung des Funktionsgraphen. Die Position $a_0=0$ ist ausgezeichnet durch eine gewisse Symetrie zur x-Achse. Die Fläche unterhalb und oberhalb der Achse, die vom Funktionsgraphen eingeschlossen werden, sind gleich.



Rot: $f(x)=\sin(x)+1$ und $a_0=2$

Blau: $f(x)=\sin(x)$ und $a_0=0$



Rot: $f(x)=\cos(x)+1$ und $a_0=2$

Blau: $f(x)=\cos(x)$ und $a_0=0$

Grün: $f(x)=\cos(x)-1$ und $a_0=-2$

Grund: Für alle harmonischen Schwingungen $\cos(kx), \sin(kx)$ und auch e^{ikx} ($k \in \mathbb{N}$) gilt, dass das

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx = \frac{1}{k}\sin(kx)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{k}(\sin(2k\pi)-\sin(0))=0$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx = \frac{e^{ikx}}{ik}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1-1}{ik}=0$$

Hingegen erhalten wir für $k=0$

$$\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = \frac{a_0}{2}x\Big|_0^{2\pi} = a_0\pi$$

$$\int_0^{2\pi} c_0\,dx = c_0 \cdot 2\pi$$

Sei nun

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$$

ein trigonometrisches Polynom, dann ist

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = a_0\pi$$

$$\rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

Analalog für $f(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikx}$

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} 0 + 2\pi c_0 + \sum_{k=1}^{n} 0 + 2\pi c_0\,dx$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

Gewisse T-periodische Funktionen $f(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) haben eine Darstellung

$$\boxed{f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\cdot e^{ik\omega t} \underbrace{=}_{Euler} \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega t)+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(k\omega t)}$$

Harmonische Sythese: $c_k(k\in\mathbb{Z})\rightarrow f(t)(t\in\mathbb{R})$

Harmonische Analyse: $f(t)(t\in\mathbb{R})\rightarrow c_k(k\in\mathbb{Z})(\underset{a_k}{\overset{\text{Euler}}{\rightarrow}}, b_k)$

Wegen der „Orthogonalitätsrelation“ $\int_0^T e^{ik\omega t}dt=0$ ($k\in\mathbb{Z}, k\neq 0$) und für $k=0$: $\int_0^T e^0\,dt=\int_0^T 1\,dt=T$

finden wir $c_0\cdot T=\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\cdot e^{ik\omega t}dt=\int_0^T c_0\cdot 1\,dt$ was dann $\boxed{c_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt}$ ergibt.

Die anderen Koeffizienten c_m ($m\in\mathbb{Z}$) finden wird durch Frequenzverschiebungen:

$$f(t)\cdot\underbrace{e^{-im\omega t}}_{\text{rotieren}}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\cdot e^{ik\omega t}\cdot\underbrace{e^{-im\omega t}}_{\text{rotieren}}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\cdot e^{i\omega t(k-m)}$$

also

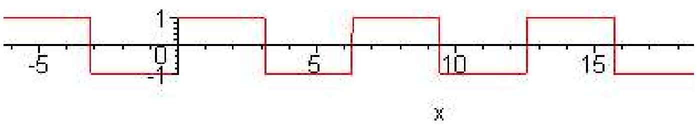
$$\int_0^T f(t)\cdot e^{-ik\omega t}dt=\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\cdot e^{i\omega t(k-m)}dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{(c_k\cdot\int_0^T e^{i\omega t(k-m)}dt)}_{=\begin{Bmatrix}0 \text{ wenn } k\neq m\\ T \text{ wenn } k=m\end{Bmatrix}}$$

$$\int_0^T f(t)\cdot e^{-im\omega t}dt=0+0+..+0+c_m\cdot T+0+..+0+0$$

$$\boxed{c_m=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot e^{-im\omega t}dt}$$

<u>Grundbeispiel</u>: Rechtecksschwingung

$$f(t)=\begin{Bmatrix} 1 \text{ wenn } 0<t<\frac{T}{2}\\ -1 \text{ wenn } \frac{T}{2}<t<T\end{Bmatrix}\text{(im Periodenintervall)}$$



- Sprungstellen bei $t=\frac{k\cdot T}{2}(k\in\mathbb{Z})$
- unstetig
- Normierung: $x=\omega t$ (Phase)

Harmonische Analyse von $f(t)$:

$$c_m=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot e^{-im\omega t}dt$$

Substitution von $x=\omega t, dx=\omega dt$:

$$c_m=\frac{1}{T}\int_0^T f(\frac{x}{\omega})\cdot e^{-imx}\frac{dx}{\omega}=\frac{1}{\omega T}\int_0^T f(\frac{x}{\omega})\cdot e^{-imx}dx$$

Da $\omega T=2\pi$:

$$c_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^T f(\frac{x}{\omega})\cdot e^{-imx}dx \quad\rightarrow\quad f(\frac{x}{\omega})=\left\{\begin{matrix}1 \text{ wenn } 0<x<\pi\\ -1 \text{ wenn } \pi<x<2\pi\end{matrix}\right\}$$

$$c_m=\frac{1}{2\pi}(\int_0^{\pi} 1\cdot e^{-imx}dx+\int_{\pi}^{2\pi} -1\cdot e^{-imx}dx)$$

für $m\neq 0$:

$$c_m=\frac{1}{2\pi}(\frac{e^{-imx}}{-im}|_0^{\pi}-\frac{e^{-imx}}{-im}|_{\pi}^{2\pi})=\frac{1}{2\pi}(\frac{e^{-im\pi}}{-im}-\frac{1}{-im}-\frac{1}{-im}+\frac{e^{-im\pi}}{-im})=\frac{1}{i\pi m}(1-e^{-im\pi})$$

$$c_m=\frac{1}{i\pi m}(1-(-1)^m)=\left\{\begin{matrix}0 \text{ wenn m gerade}\\ \frac{2}{\pi i m} \text{ wenn m ungerade}\end{matrix}\right\}$$

Harmonische Sythese:

$$f(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_k\cdot e^{im\omega t}$$

Da bei geradem m der Ausdruck 0 ist, kann man sich hier auf die geraden m beschränken.

$$f(t)=\underbrace{\frac{2}{\pi i}\cdot e^{i\omega t}}_{m=1}-\underbrace{\frac{2}{\pi i}\cdot e^{-i\omega t}}_{m=-1}+\underbrace{\frac{2}{3\pi i}\cdot e^{3i\omega t}}_{m=3}-\underbrace{\frac{2}{3\pi i}\cdot e^{-3i\omega t}}_{m=-3}+..-..$$

Reelle Form:

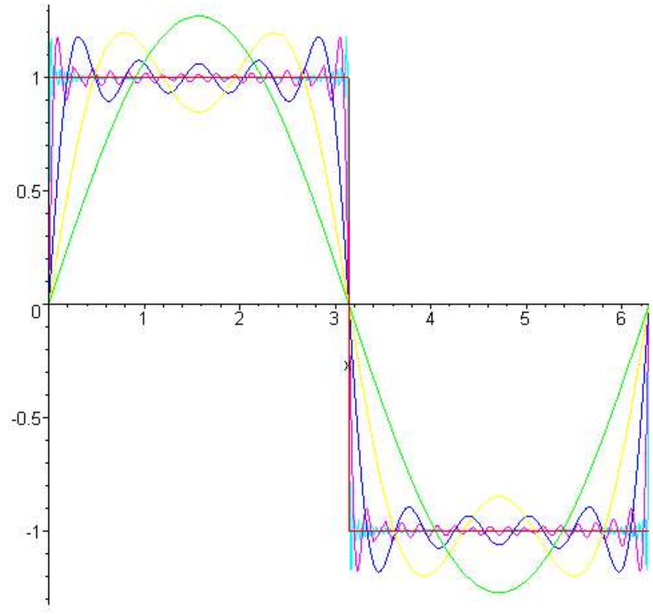
$$f(t)=\frac{4}{\pi}(\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i})+\frac{4}{3\pi}(\frac{e^{3i\omega t}-e^{-3i\omega t}}{2i})+..$$

$$f(t)=\frac{4}{\pi}(\sin(\omega t)+\frac{\sin(3\omega t)}{3}+..)$$

Normierte Form:

$$\boxed{f(\frac{x}{\omega})=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)\cdot x)}{2k+1}}$$

Desto höher k gewählt wird, desto genauer wird die Approximation (im Bild unterhalb habe ich für k=0,1,4,16,64 gewählt:



Konvergenzkontrolle:

$$x=0 \rightarrow f(\frac{0}{\omega})=\frac{4}{\pi}0=0$$
$$x=pi \rightarrow f(\frac{\pi}{\omega})=\frac{4}{\pi}0=0$$
$$x=\frac{\pi}{2} \rightarrow f(\frac{\pi}{2\omega})=\frac{4}{\pi}0=1$$
$$x=\frac{\pi}{4} \rightarrow f(\frac{\pi}{4\omega})=\frac{4}{\pi}0=1$$

6. Zusammenfassung

Eine Zusammenfassung der Fourier-Reihen Theorie kann auch unter Wikipedia eingesehen werden:

- http://de.wikipedia.org/wiki/Fourier-Reihe
- http://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Identit%C3%A4t
-

7. Aufgaben

Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind noch nicht fertiggestellt!

7.1. Eulerformeln

1. Die Funktion $g:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ ist gerade wenn gilt: $\forall_{z\in\mathbb{C}}\, g(-z)=g(z)$
   Die Funktion $u:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ ist ungerade wenn gilt: $\forall_{z\in\mathbb{C}}\, u(-z)=-u(z)$

   a)Zeige, dass sich jede Funktion $f:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ eindeutig als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion schreiben lässt. (Beispiel: $x^{2n}(x\in\mathbb{R})$ ist gerade, $x^{2n+1}(x\in\mathbb{R})$ ist ungerade).
   $f(x)=g(x)+u(x)$ ($g(-x)=g(x)$ und $u(-x)=-u(x)$)
   $f(-x)=g(-x)+u(-x)$
   $f(-x)=g(x)-u(x)$

$$\rightarrow f(x)+f(-x)=2g(x)\rightarrow g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$
$$\rightarrow f(x)-f(-x)=2u(x)\rightarrow u(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

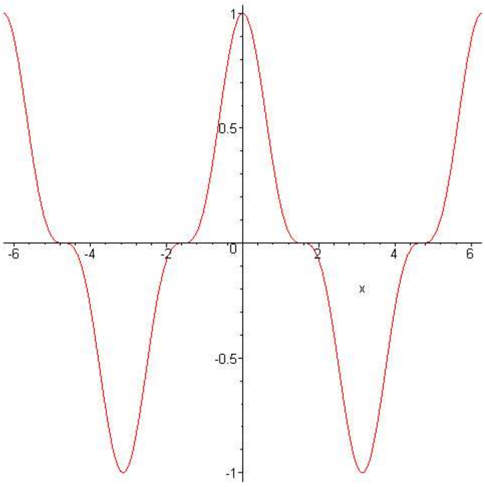
Ist nun $g(x)$ gerade und $u(x)$ ungerade?

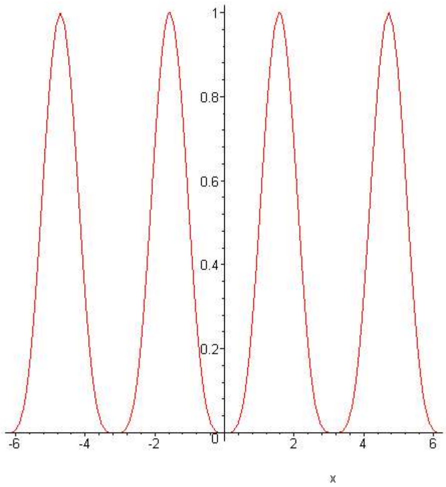
$$g(x)=g(-x)\rightarrow\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{f(-x)+f(x)}{2}$$
$$u(x)=-u(-x)\rightarrow\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{f(-x)-f(x)}{2}$$

Beispiele:

$$e^x=\underbrace{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}_{\cosh(x)}+\underbrace{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}_{\sinh(x)}$$
$$e^{ix}=\underbrace{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}_{\cos(x)}+\underbrace{\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}}_{i\sin(x)}=\cos(x)+i\sin(x)$$
$$f(x)=\underbrace{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos(kx)}_{\text{gerade } g(x)}+\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin(kx)}_{\text{ungerade } u(x)}$$

2. Fourierreihe der periodischen Funktionen $\cos^3 x$ und $\sin^4 x$





Fourierreihen:

$$\cos^3(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8}=\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)$$
$$\sin^4(x)=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4=\frac{e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{16}=\frac{1}{8}\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$$

7.2. Trigonometrische Polynome

1. Gegeben ist das Sinuspolynom $f(x)=\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)$

a) Stelle den Term $f(x)$ in der komplexen Form $\sum_{k=-3}^{3}c_k\cdot e^{ikx}$ dar.

$$f(x)=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})+\frac{1}{2i}(e^{2ix}-e^{-2ix})+\frac{1}{2i}(e^{3ix}-e^{-3ix})$$

$\rightarrow c_k = \frac{1}{2i} \rightarrow f(x) = \sum_{k=-3}^{3} \frac{1}{2i} e^{ikx} = \frac{1}{2i} \sum_{k=-3}^{3} e^{ikx}$

b) Schreibe den Term $f(x)$ in der Form $f(x) = \sin(x) \cdot \sum_{k=0}^{e} A_k \cdot \cos^k(x)$.

$\sin(x) = \sin(x)$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$\sin(3x) = \sin(2x + x) = \sin(x)(4\cos^2(x) - 1)$

Addition: $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = \sin(x)(2\cos(x) + 4\cos^2(x))$

Also ist: $A_0 = 0 \quad A_1 = 2 \quad A_2 = 4$

c) Bestimme die Nullstellen von der Funktion f im Periodenintervall $[0, 2\pi[$:

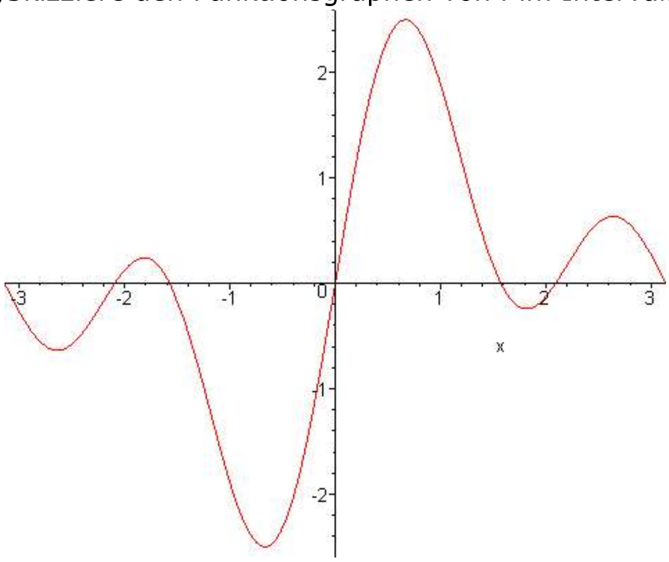
$f(x) = \sin(x)\cos(x)(2\cos(x) + 1) = 0$ (durch Formeln von Aufgabe b)

$\sin(x) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = \pi$

$\cos(x) = 0 \rightarrow x_3 = \frac{\pi}{2}, x_4 = \frac{4\pi}{2}$

$\cos(x) = \frac{-1}{2} \rightarrow x_5 = \frac{2\pi}{3}, x_6 = \frac{4\pi}{3}$

d) Skizziere den Funktionsgraphen von f im Intervall von $[-\pi, \pi]$.



2. Gegeben ist das Kosinuspolynom $g(x) = 1 + \cos(2x) + \cos(4x)$

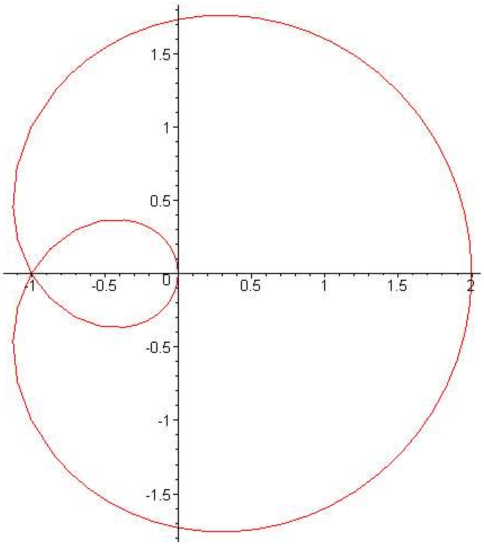
a) Schreibe den Term $g(x)$ in der komplexen Form.

$$g(x) = \frac{1}{2}(e^{0ix} + e^{-0ix}) + \frac{1}{2}(e^{2ix} + e^{-2ix}) + \frac{1}{2}(e^{4ix} + e^{-4ix}) = \frac{1}{2} + \sum_{k=-2}^{2} \frac{1}{2} e^{2ikx} = \frac{1}{2}(1 + \sum_{k=-2}^{2} e^{2ikx})$$

b) Schreibe den Polynom $g(x)$ als Polynom $g(x) = \sum_{k=0}^{4} A_k \cos^k(x)$. *

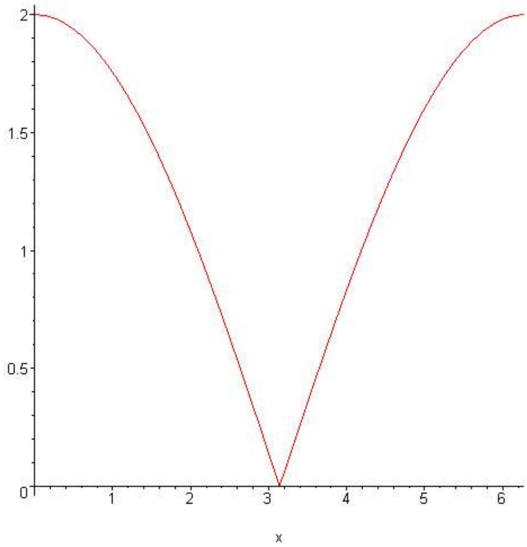
3. Gegeben ist das trigonometrische Polynom $h(x) = e^{ix} + e^{2ix}$.

a) Finde alle Stellen $x \in [0, 2\pi]$, für die $h(x)$ reelwertig ist.



$$\operatorname{Im}(e^{ix}+e^{2ix})=0$$
$$\sin(x)+\sin(2x)=0$$
$$\sin(x)(1+2\cos(x))=0$$
$$\to x=0,\pi,\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$$

b)Vereinfache den Term $|h(x)|$ und skizziere den Funktionsgraphen von $|h|$ auf dem Intervall $[0,2\pi]$.



$$|e^{ix}+e^{2ix}|=\left|e^{\frac{3}{2}ix}(e^{\frac{-1}{2}ix}+e^{\frac{1}{2}ix})\right|=\underbrace{\left|e^{\frac{3}{2}ix}\right|}_{1}\cdot\underbrace{\left|e^{\frac{-1}{2}ix}+e^{\frac{1}{2}ix}\right|}_{2\cdot\left|\cos(\frac{x}{2})\right|}=2\cdot\left|\cos(\frac{x}{2})\right|$$

7.3. Harmonische Analyse I

1. Die 2π -periodische Sägezahnschwingung s ist im Periodenintervall]0, 2π [gegeben durch $s(x)=x-\pi$ (dh. $T=2\pi$).

   a)Entwickle die Schwingung $s(x)$ in die komplexe Fourierreihe.

   $s(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\cdot e^{ikx}$ wobei $x=\omega t$

$$c_0=\frac{1}{T}\int_0^T s(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x-\pi\,dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{(x-\pi)^2}{2}\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{2}\right)=0$$

$$c_k=\frac{1}{T}\int_0^T s(x)\cdot e^{-ikx}\,dx$$

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\cdot e^{-ikx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\left(\left(\frac{(x-\pi)\cdot e^{-ikx}}{-ik}\Big|_{2\pi}^{0}\right)+\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikx}}{ik}\,dx\right)$$

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\left(\pi\frac{1}{-ik}+\pi\frac{1}{-ik}+\underbrace{\left(\frac{e^{-ikx}}{-(ik)^2}\Big|_{2\pi}^{0}\right)}_{0}\right)$$

$$c_k=\frac{1}{-ik}$$

Summen Grenzen können geändert werden, da wir hier die Summe erweitern und bei $k=0$ $c_k=0$ ist:

$$s(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(c_k\cdot e^{ikx})$$

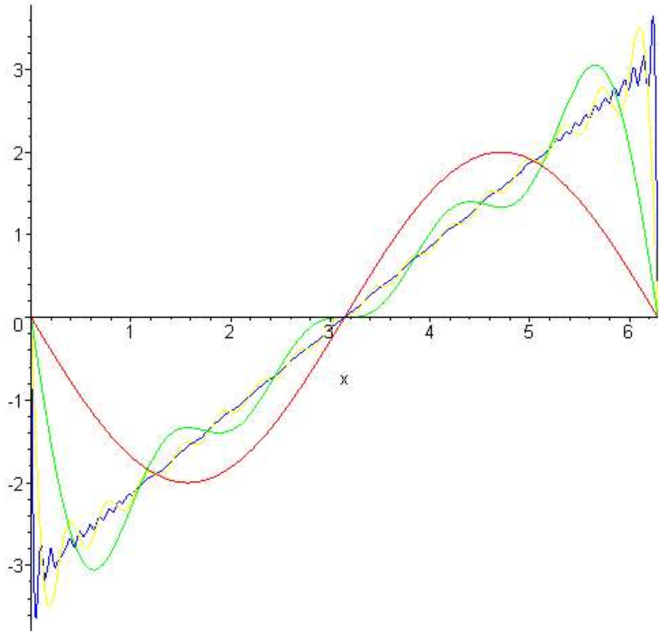
$$s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(c_k\cdot e^{ikx}+c_k e^{-ikx})$$

$$s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{i}{k}\cdot e^{ikx}-\frac{i}{k}\cdot e^{-ikx}\right)$$

b)Wandle die Fourierreihe $s(x)$ in die reelle Form um.

$$s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{i}{k}\cdot e^{ikx}-\frac{i}{k}\cdot e^{-ikx}\right)=i\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sin(kx)\cdot 2\frac{i}{k}\right)=-2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(kx)}{k}\right)$$

c)Skizziere nun die Funktion für k=1,4,16,64



d)Kontrolliere, ob die reelle Fourierreihe an den Stellen $x=0, x=\pi$ und $x=\frac{\pi}{2}$ tatsächlich die Summe $s(x)$ hat.

$x=0,\pi\rightarrow s(x)=0$ OK.

$$x=\frac{\pi}{2}\rightarrow s(x)=-2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\sin(\frac{k\cdot\pi}{2})}{k})=-2\cdot(1+0-\frac{1}{3}+0+\frac{1}{5}+...)=-2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{-1}{2}$$ OK.

e)Gib die reellen Fourierreihen von $s(x)-\pi$ und $s(x-\pi)$:

$$s(x)-\pi=\underbrace{-\pi}_{\frac{a_0}{2}}+-2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\sin(kx)}{k})$$ also ist hier $a_0=-2\pi$ und $b_k=\frac{-2}{k}$

$$s(x-\pi)=-2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\sin(k\cdot(x-\pi))}{k})=-2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{(-1)^k}{k}}_{b_k}\cdot\sin(kx))$$

Achtung: erst der 2. Term ist eine Fourierreihe!

Wichtig: Wenn wie hier x mit $x-\pi$ ersetzen, muss dies nur in Synthese gemacht werden. D.h. es muss nur die Fourier-Formel angepasst werden. *Nicht aber die Koeffizienten Formeln!*

f) Bestimme die Fourierreihen der beiden Schwingungen $s(x)\pm s(x-\pi)$.

$$s(x)+s(x-\pi)=-2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\sin(kx)}{k})+-2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{(-1)^k}{k}\cdot\sin(kx))$$

$$\rightarrow-2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\sin(kx)}{k}+\frac{(-1)^k}{k}\cdot\sin(kx))$$

$$\rightarrow-2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\sin(kx)}{k}\cdot(1+(-1)^k))\quad\rightarrow\text{für ungerade gibt die Summe } 0$$

$$\rightarrow-2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\sin(2kx)\cdot 2}{2k})$$

$$\rightarrow-2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\sin(2kx)}{k})=s(2x)$$

$$s(x)-s(x-\pi)=-2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\sin(kx)}{k})--2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{(-1)^k}{k}\cdot\sin(kx))$$

$$\rightarrow-2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\sin(kx)}{k}-\frac{(-1)^k}{k}\cdot\sin(kx))$$

$$\rightarrow-2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\sin(kx)}{k}\cdot(1-(-1)^k))\quad\rightarrow\text{für gerade gibt die Summe } 0$$

$$\rightarrow-2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{\sin(2(k+1)\cdot x)}{2k+1}\cdot 2)$$

$$\rightarrow-4\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{\sin(2(k+1)\cdot x)}{2k+1})=-\pi\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{\sin(2(k+1)\cdot x)}{2k+1})$$

8. Weitere Formeln

Trigonomometrische Formeln:

$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$

$\sin(3x)=\sin(2x+x)=\sin(x)(4\cos^2(x)-1)$

$\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$

$\cos(4x)=2\cos^2(2x)-1=8\cos^4(x)-8\cos^2(x)+1$

Euler Formeln:

$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$

$e^{iax}=\cos(ax)+i\sin(ax)$

$e^{-ix}=\cos(x)-i\sin(x)$

$e^{-iax}=\cos(ax)-i\sin(ax)$

$\sin(x)=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$	$\cos(x)=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$
$\sin(ax)=\frac{1}{2i}(e^{iax}-e^{-iax})$	$\cos(ax)=\frac{1}{2}(e^{iax}+e^{-iax})$

9. Stichwortverzeichnis